Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 12**	14.01.2008

[Abgabe 21.01 *vor* der Vorlesung]

Aufgabe 35: (Reihenanfang, um ein Problem vorab zu vereinfachen) (1+2+1+2=6 Punkte)

In jedem der folgenden vier Fälle schwingt eine Masse m um den Ursprung im Potential $V(x) = \kappa\, a^2\, f(x/a)$, und genügt damit der Bewegungsgleichung $m\ddot{x} = -\partial_x V(x)$. Nach Reihenentwicklung von $f(s)$ bis mit s^2 (Taylor–Reihe verboten!) kann per $V(x) = \mathrm{const} + \frac{1}{2}\,\kappa_{\mathrm{eff}}\, x^2$ ein effektives Kappa abgelesen und folglich die Frequenz in der sich so ergebenden Schwingungsgleichung $\ddot{x} = -\omega^2 x$ als $\omega = \sqrt{\kappa_{\mathrm{eff}}/m}$ angegeben werden.

(a) $f(s) = \dfrac{1}{s^2}\Big(\cos(s) - \cos\left[\sinh(s)\right] \Big)$ [Lsg: $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{3\,m}}$ — aber wie kommt dies heraus?]

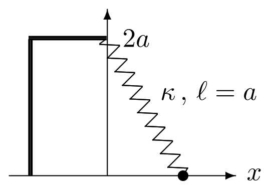
(b) $f(s) = \dfrac{2\,\cosh(s)}{2-\cosh^2(s)} = \partial_s \ln\left(\dfrac{1+\sinh(s)}{1-\sinh(s)}\right)$

einmal via ch–Reihenanfang, zum anderen per Entwicklung des ln.

(c) $f(s) = -\dfrac{\ln\left[1+\cosh(s)\right]}{\cosh(s)}$

[Hinweis: $\ln(2+x) = \ln(2) + \ln(1+x/2) \approx \ln(2) + x/2 + \ldots$]

(d) m kann sich nur auf der x–Achse bewegen. Eine in Höhe $2\,a$ befestigte Feder (κ, $\ell{=}a$) sorgt für rücktreibende Kraft. $f(s) = ?$ Und $\omega = ?$



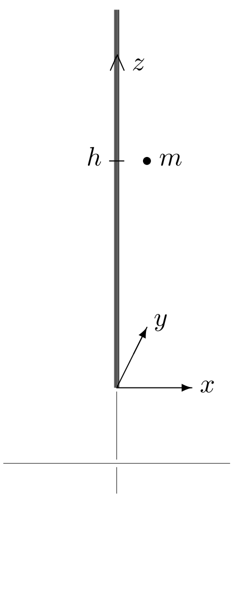
Aufgabe 36: (Potenzreihe als Ansatz, um ein Dgl–Problem zu lösen) (2 Punkte)

Problem: $\boxed{\ddot{x} = 2\,a\,\omega^2\, e^{-x/a} - \frac{1}{a}\,\dot{x}^2 \;,\;\; \dot{x}(0) = 0 \;,\;\; x(0) = 0}$. $x(t) = ?$

In **Ü34** hatten Sie den Reihenanfang der Lösung als $x(t) = a\,\left(\omega^2\, t^2 - \frac{1}{2}\omega^4\, t^4 + \frac{1}{3}\omega^6\, t^6 + \ldots\right)$ erhalten. Von welcher Funktion $x(t)$ könnte dieser Reihenanfang stammen? Erhärten Sie Ihre Vermutung, indem Sie explizit nachsehen, ob Ihr $x(t)$ den obigen x–ER tatsächlich erfüllt.

Aufgabe 37: (Reihenanfänge zur Resultat–Diskussion) (1.5+1.5=3 Punkte)

Ein stabförmiger Himmelskörper wurde entdeckt. Er beginnt im Ursprung, ist unendlich dünn und unendlich lang, hat konstante lineare Massendichte σ (:= Masse pro Höhenintervall) und zieht eine Probemasse m an, die sich irgendwo bei $\vec{r}$ befindet. Am Anfang des Sommersemesters werden wir in der Lage sein, das Potential $V(\vec{r})$ dieser Kraft auszurechnen: $V(\vec{r}) = \gamma\, m\, \sigma\, \ln\left(\sqrt{z^2+\rho^2} - z\right)$ mit $\rho^2 := x^2 + y^2$.



(a) Wenn sich m bei festem $z{=}h$ dem Stab nähert, sollte die Anziehungskraft nichts mehr vom „weit weg“ erscheinenden Stabende bemerken können. Ermitteln Sie den bezüglich $\rho \to 0$ asymptotisch führenden V–Term und aus diesem die Kraft $\vec{K}$ auf m. Nähert sich m hingegen auf der z–Achse von unten her dem Stabende ($z{=}{-}\varepsilon$), so unterscheidet sich $V(\varepsilon)$ ein klein wenig vom obigen $V(\rho)$, nämlich wodurch?

(b) Wenn Sie m auf einem zur x–Achse parallelen geraden Draht bei $z{=}{-}a$ reibungsfrei gleiten lassen, so vollführt sie dort kleine Schwingungen mit $\omega^2 = ?$ Dimensionsprobe!