

[Abgabe 14.01 vor der Vorlesung]

Aufgabe 32: Exponentialfunktion (3+3=6 Punkte)

(a) Ein Schiff (Masse m), bei $x(0) = 0$ mit $\dot{x}(0) = 0$ startend, erfährt eine konstante Schubkraft mk sowie die Wasser-Reibungskraft $-m\alpha v$. Schreiben Sie den v -ER für dieses 1D Problem auf, und lösen Sie ihn für v und $x(t)$ durch Aufleiten. Mit welcher t -Potenz startet das Schiff?

(b) Die Anzahl $N(t)$ von Elefanten verändere sich gemäß $\dot{N} = \alpha N - \beta N^2$, $N(0) = N_0$ wobei α, β positive Konstanten sind. $N(t) = ?$ [Hinweis: der ER für die Hilfsfunktion $\eta(t) = 1/N(t)$ könnte viel einfacher zu lösen sein.] Welche ferne Zukunft $N \rightarrow ?$ bei $t \rightarrow \infty$ hat die Population? ((Die N -Dgl entsteht, wenn man in $\dot{N} = G \cdot N - S \cdot N$ die Sterberate $S = S_0$ konstant setzt, aber die Geburtenrate G am Bestand z.B. von Futterpflanzen orientiert, welcher seinerseits linear mit der Anzahl der Tiere abnehme: $G = G_0 - \beta \cdot N$, so daß $\alpha = G_0 - S_0$. Ein sehr optimistisches (Elefanten-) Welt-modell.))

Aufgabe 33: Dgl-Lösungsmethoden (0.5+1+1+0.5+0.5+0.5=4 Punkte)

Ein Fallschirmspringer erfährt eine Luft-Reibungskraft proportional zu seiner Fallgeschwindigkeit $v(t)$, welche also dem folgenden ER genügt: $\dot{v} = -\lambda v - g$, $v(0) = 0$ Untersuchen Sie nun verschiedene Lösungsmethoden.

- (a) Welcher Ansatz empfiehlt sich hier? Vielleicht gelingt es Ihnen durch "scharfes Hinsehen", die Lösung bereits jetzt direkt hinzuschreiben?
- (b) Wie funktioniert die Lösungsmethode $v(t) = u(t) + a$, wobei Sie die Konstante a am besten gleich so festlegen, daß der g -Term verschwindet?
- (c) Eine anderer Ansatz ist $v(t) = e^{-\lambda t} \cdot w(t)$. Führt auch er zum (gleichen) Ziel?
- (d) Welche η -Dgl folgt für den Ansatz $v(t) = 1/\eta(t)$? [Ist hier keine Vereinfachung, also nicht zu lösen versuchen.]
- (e) $v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = ?$ — aber das zeigte doch schon die Dgl, nämlich inwiefern?
- (f) Mit welcher der obigen Lösungsmethoden liegt man auch bei $\dot{v} = -\lambda v - g(t)$ noch richtig?

Aufgabe 34: (Potenzreihe als Ansatz, um ein Dgl-Problem zu lösen) (2 Punkte)

Problem: $\ddot{x} = 2a\omega^2 e^{-x/a} - \frac{1}{a}\dot{x}^2$, $\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = 0$. $x(t) = ?$

Lösungsanleitung: Wir setzen $x(t) = a(c_2 t^2 + c_4 t^4 + c_6 t^6 + \dots)$ an, haben damit die Anfangsbedingungen bereits erfüllt, und bestimmen c_2, c_4 und c_6 aus der Dgl.

[Nächste Woche werden wir die Funktion kennenlernen, deren Potenzreihenanfang wir gerade erhalten haben.]