Übungen zu EMTP I	**Blatt Nr. 08**	03.12.2007

[Abgabe 10.12 *vor* der Vorlesung]

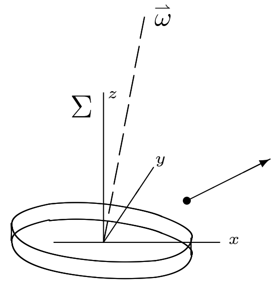
Aufgabe 22: Dreh-quickies (1+2+1=4 Punkte)

(a) Wenn allgemein $D = c\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - s\,\vec{e}\times$ gilt, dann ist sicherlich $D^T = ?$ Wie wird in dieser Sprache $D\,D^T$ zur Einheitsmatrix?

(b) Kann es sich bei $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ um eine Drehmatrix handeln (warum?)? Geben Sie die Drehachse $\vec{e}$ und die Determinante von D an.

(c) Verschaffen Sie sich zur Matrix D aus (b) den Kosinus ($=: c$) und den Sinus ($=: s$) des Drehwinkels und bilden $c^2 + s^2$ zur Kontrolle.

Aufgabe 23: Drehmatrix: rotierende Raumstation (1+2+2+1=6 Punkte)



Astronauten möchten die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\,\vec{e}$ ihrer ringförmigen Station ermitteln. Sie schießen dazu ab Ursprung = Zentrum der Raumstation eine Leuchtkugel ins All und beobachten ihren Ort:

$$\vec{r}\,'(t) = v_0\,t \begin{pmatrix} \sqrt{2}\,(c+s) \\ 1+c-s \\ 1-c+s \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{matrix} c = \cos(\omega t) \\ s = \sin(\omega t) \end{matrix} \;.$$

Daß es sich bei ω um den Betrag der gesuchten Winkelgeschwindigkeit handelt, ist klar. Man beginnt jedoch darüber zu streiten, ob die Entfernung der Kugel etwas mit ω zu tun hat.

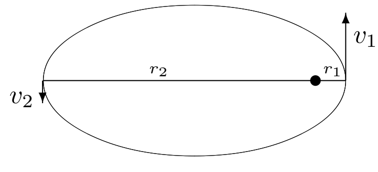
(a) Schlichten Sie den Streit durch Ausrechnen: $|\vec{r}\,'| = ?$

(b) Die Achsen des körperfesten Systems Σ' der Station mögen zu $t = 0$ mit jenen des skizzierten Inertialsystems Σ zusammenfallen. Zu $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ haben wir drei Informationen. [1.] In Σ hat die Leuchtkugel konstante Geschwindigkeit, so daß $\vec{r} = v_0\,t\,\vec{a}$ gilt mit zeitlich konstantem (und dimensionslosem) Vektor $\vec{a}$. [2.] $D = c\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - s\,\vec{e}\times$ [3.] In der Gleichung $\vec{r}\,' = D\vec{r}$ ist (nach beidseitigem Streichen von $v_0\,t$) Koeffizientenvergleich möglich: Terme mit c müssen sich kompensieren, ebenso Terme mit s und ebenso Terme ohne c oder s. Welche drei Gleichungen folgen? $\vec{e} = ?$

(c) Achse $\vec{e}$ und Drehwinkel ωt bekannt — welche neun Elemente hat also die Drehmatrix D? Sp$(D) = ?$ Stehen z.B. der zweite und der dritte Spaltenvektor wirklich senkrecht aufeinander?

(d) Nun kann $\vec{a}$ auf zwei Weisen erhalten werden, via $D^T\vec{r}\,'$ oder aus den drei Gleichungen aus Teil (b). Wählen Sie den bequemer erscheinenden Weg. Ist $|\vec{r}| = |\vec{r}\,'|$ erfüllt?

Aufgabe 24: Erhaltungssätze (1+1=2 Punkte)



Zur elliptischen Bahn eines Kometen (Masse m) ist der kleinste (r_1) und der größte Abstand (r_2) von der Sonne (M) bekannt.

(a) Die Erhaltungssätze liefern zwei Gleichungen für die Geschwindigkeiten an diesen zwei extremalen Punkten: $v_1 = ?$ und $v_2 = ?$

(b) Im Diagramm $V_{\text{eff}}(r)$ über r liegen bei r_1, r_2 die Schnittpunkte mit der E–Horizontalen (Skizze!). Berechnen Sie aus $V_{\text{eff}}(r_1) = V_{\text{eff}}(r_2)$ den Drehimpuls $L = ?$ des Kometen (als Funktion von r_1, r_2) und aus diesem zur Kontrolle erneut z.B. v_1.