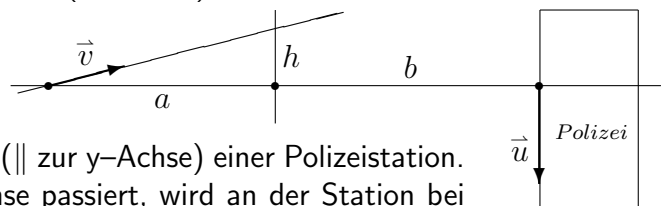


#### Aufgabe 4: Nächtliche Geschwindigkeitskontrolle (3 Punkte)

Eine gerade Landstraße verläuft über die Punkte  $(-a, 0)$  und  $(0, h)$ . Der Scheinwerfer eines Autos wirft den Schatten eines

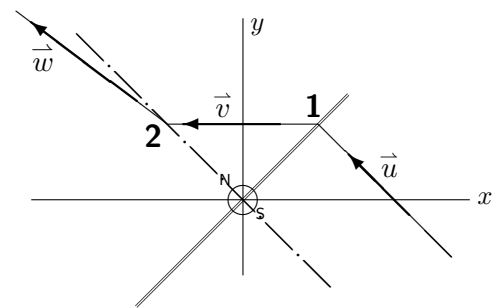
Telegraphenmastes (= Ursprung) auf die Wand ( $\parallel$  zur  $y$ -Achse) einer Polizeistation. In dem Moment, in dem der Raser die  $x$ -Achse passiert, wird an der Station bei  $(b, 0)$  die Schattengeschwindigkeit  $u$  registriert. Erstellen Sie bitte eine Formel ( $u, a, b, h$  enthaltend) für die Geschwindigkeit  $v$  des Autos.

[Hinweise: Die Skizze ist eine Draufsicht; Hier ist die Lichtgeschwindigkeit  $c \approx \infty$ .]



#### Aufgabe 5: Zentralkraft und Drehimpuls (3+2=5 Punkte)

Das seltsame Zentralkraftfeld eines fernen Planeten (Mitte = Ursprung) ist fast überall Null. Nur nahe an der  $S-N$ -Achse stößt es stark ab, und in enger Umgebung der Äquatorebene zieht es an. Eine Raumsonde fliegt genau in der Ebene  $z = 0$  ein, und zwar parallel zur  $S-N$ -Achse (links-diagonal) und mit Geschwindigkeit  $u$ . Sie wird bei  $\vec{r}_1 = (1, 1, 0)a/\sqrt{2}$  an der Äquatorebene abgelenkt und bei  $\vec{r}_2 = (-1, 1, 0)a/\sqrt{2}$  durch das polare Bündel in Richtung  $\vec{e}_w = (-4, 3, 0)/5$  in den Raum geschleudert — mit welcher Geschwindigkeit  $w$ ?



(a) Was bei Punkt 1 gilt, kann als Gleichheit zweier Skalarprodukte (mit welchem Einheitsvektor  $\vec{e}$ ?) notiert werden. Weil  $\vec{u} = (?, ?)$  bekannt ist, folgt  $\vec{v}$  und (nach gleichem Prinzip) dann  $w$ .

[Hinweis: Eine Zentralkraft wirkt in Richtung des Ursprungs, und läßt daher Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zu dieser Richtung unverändert.]

(b) Jemand behauptet,  $\vec{\ell} := \vec{r} \times \vec{v}$  sei eine interessante Bildung (und  $\vec{L} = m\vec{\ell}$  heiße *Drehimpuls*). Wir rechnen diesen Vektor vier mal aus, und zwar bei 1 unmittelbar vor Eintritt in die Kraftfeld-Schicht, dort unmittelbar nach Austritt, bei 2 vor und bei 2 nach. Wir bilden also  $\vec{\ell}_{1v}$ ,  $\vec{\ell}_{1n}$ ,  $\vec{\ell}_{2v}$  und  $\vec{\ell}_{2n}$  — und staunen. (Es lag an der Zentralkraft, gilt für jede und heißt *Drehimpulserhaltung*.)

#### Aufgabe 6: Vier quickies (1+0.5+0.5+1=3 Punkte)

(a) Eine ferne Zivilisation legt einen Vektor  $\vec{a}$  durch Angabe der Abstände  $u, v, w$  zu den Achsen (statt zu den Ebenen) fest.  $u$  ist die Länge des Lotes vom  $\vec{a}$ -Endpunkt zur  $x$ -Achse usw. Wie drückt sich der Betrag  $a = |\vec{a}|$  durch  $u, v, w$  aus?

(b) Zeigen Sie: Sind die Beträge von Summe und Differenz zweier Vektoren gleich, dann sind die Vektoren senkrecht zueinander.

(c) Zeigen Sie: Sind Summe und Differenz zweier Vektoren senkrecht zueinander, dann haben die Vektoren denselben Betrag.

(d) Wird eine Komponente (Ihrer Wahl) der linken Seite von  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$  ausführlich durch Komponenten ausgedrückt und (unabhängig davon) selbiges auch mit der rechten Seite getan, so ist die „bac-cab-Formel“ *verifiziert*.