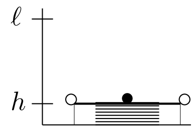
Probeklausur zu EMTP I	Uni Bielefeld	WS 07/08

[Materialien bereitlegen ; Wecker auf 2 Stunden stellen ; Alle Aufgaben lesen, selektiv bearbeiten]
[Nach 2h Blatt umdrehen, korrigieren ; 30 Punkte, bei ≥ 9 hätten Sie bestanden]

Aufgabe 1: Western (2 Punkte)
Die Räder (Durchmesser 0.8 Meter, 17 Speichen) einer Kutsche scheinen im Fernsehen (Bildfrequenz 50/Sekunde) still zu stehen. Mit welchen möglichen Geschwindigkeiten v fährt die Kutsche?

Aufgabe 2: Energieerhaltung, Bwgl (3+1=4 Punkte)
Jemand (Masse m) sitzt auf einem gefederten Stuhl (Feder: κ, ℓ), dessen Sitzfläche in Höhe $h < \ell$ festgebunden ist ($h, \ell \ll R_{\mathrm{Erde}}$). Die Leinen werden nun gekappt.
(a) Mit welcher Geschwindigkeit v löst sie sich vom Sitz? Es war also $\kappa > \kappa_{\min} =$?
(b) Wie sähe der ER zu diesem Problem, aber mit angeschnallter Person, aus?



Aufgabe 3: Drehungen (3 Punkte)
Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze, wohin die neuen Einheitsvektoren $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ zeigen, wenn man das Koordinatensystem zuerst um $\pi/2$ um die z–Achse dreht und danach um $\pi/2$ um die x–Achse. Zeigen Sie, daß auch das Produkt D der beiden Drehmatrizen zeilenweise die $\vec{f}$'s zeigt. Finden Sie einen Vektor $\vec{b}$, dessen Komponenten sich unter D nicht verändern.

Aufgabe 4: Substitution (2+2=4 Punkte)
Lösen Sie die folgenden ER's durch die Substitution $v(t) = e^{f(t)}$. [*Hinweis zu (b):* $e^{ab} = (e^a)^b$]
(a) $\boxed{\dot{v} = -\lambda(1+\omega t)v \;,\; v(0) = v_0}$ (b) $\boxed{\dot{v} = -\frac{\lambda}{(1+\omega t)}\, v \;,\; v(0) = v_0}$

Aufgabe 5: Differentialgleichung umformen (2+2=4 Punkte)
Lösen Sie die folgenden ER's durch geschicktes Umformen: v aus dem Nenner herausmultiplizieren, Differentialgleichung als $(..)^\bullet = (..)^\bullet$ schreiben, Konstante bestimmen, Lösung angeben.
(a) $\boxed{\dot{v} = -\lambda/v \;,\; v(0) = v_0}$ (b) $\boxed{\dot{v} = -\lambda/v^n \;,\; v(0) = v_0}$ $(n \neq -1)$ [check: $n = 1 \Rightarrow$ (a)?]

Aufgabe 6: Potential (2 Punkte)
Unter welcher Bedingung hat die Kraft $\vec{K} = (-\alpha x^2, \beta z, \gamma y)$ ein Potential? Welches?

Aufgabe 7: Hauptachsen (2+2=4 Punkte)
(a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Eigenwerte λ_1 und λ_2? Zugehörige Eigenvektoren $\vec{f}_1$ und $\vec{f}_2$? Sind diese automatisch orthogonal? $D =$? $[H' = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = D\, H\, D^{\mathrm{T}}]$
(b) $H = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Wie lauten die Eigenwerte λ_1, λ_2, λ_3? Ist $Sp(H) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$?

Aufgabe 8: Potenzreihen-Entwicklungen (1+1+1=3 Punkte)
(a) $\ln(\sqrt{4+\varepsilon^2}) = ..?..+\mathcal{O}(\varepsilon^4)$ (b) $\ln\left(e^{2\varepsilon} - 1\right) = ..?..+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$ (c) $\ln\left(2e^{\varepsilon}\sinh(\varepsilon)\right) = ..?..+\mathcal{O}(\varepsilon^3)$

Aufgabe 9: Ableitung der Umkehrfunktion (1 Punkt)
Angenommen die Exponentialfunktion wird als Umkehrfunktion von $\ln(x)$ eingeführt, wovon man wiederum $\partial_x \ln(x) = 1/x$ weiß. Wie erhält man dann $\partial_x \exp(x) =$?

Aufgabe 10: Störungsrechnung (3 Punkte)
Zum 1D Oszillator $\boxed{\ddot{x} = -\omega^2\, x \;,\; \dot{x}(0) = 0 \;,\; x(0) = a}$ sollte Störungsrechnung nach ω^2 zum Anfang der Kosinus–Reihe führen. Ist es so? Berechnen Sie $x(t) = x^{(0)} + x^{(1)} + x^{(2)} + \mathcal{O}(\omega^6)$.