wegen $-1 = e^{i(\pi + 2\pi n)}$ ist insbes. $\sqrt{-1} = \begin{cases} i \\ -i \end{cases}$

(($i := \sqrt{-1}$ ist falsch: $-1 = i \cdot i \overset{?}{=} \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = +1$))

5.4 Störungsrechnung

Ein Problem (Gln. für $f(x;\alpha)$) habe einen kleinen Parameter (α).
Kann die Lsg als Reihe in α-Potenzen suchen, d.h.

$$f(x;\alpha) = \underbrace{c_0(x)}_{f^{(0)}(x)} + \underbrace{c_1(x)\,\alpha}_{f^{(1)}(x)} + \underbrace{c_2(x)\,\alpha^2}_{f^{(2)}(x)} + \dots$$

in die f-Gln. einsetzen, um $f^{(0)}, f^{(1)}, \dots$ zu bestimmen.

zur Notation: wir kennen (? s. Ü33 für $v_0 = 0$, oder sonst)

sofort: v_∞ aus $\dot v = 0$

$$v(t;\lambda,g) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} \quad \text{als Lsg. v.} \quad \boxed{\dot v = -g - \lambda v,\ v(0) = v_0}$$

((freier Fall + Reibung))

$$= -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)\left(1 - \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2} + \dots\right) \quad \text{falls } \lambda \text{ "klein"}$$

((genauer: für $\lambda t \ll 1$, $\forall\ t < t_0 =$ Aufprall))

$$= \underbrace{v_0 - gt}_{v^{(0)}(t)} \underbrace{- \lambda v_0 t + \frac{g}{2}\lambda t^2}_{v^{(1)}(t)} + O(\lambda^2) \qquad (*)$$

Einschub: $\boxed{\dot v = -g - \lambda v,\ v(0) = v_0}$, $v(t) = ?$ (("Fallschirmspringer"))

stört! sonst: $v \sim e^{-\lambda t}$

Ans $v(t) = A + u(t)$

$\dot u = -g - \lambda A - \lambda u$ wird einfacher mit $A = -\frac{g}{\lambda}$

$\boxed{\dot u = -\lambda u,\quad u(0) = v_0 + \frac{g}{\lambda}}$

Lsg $u(t) = u(0)\, e^{-\lambda t}$

$\Rightarrow$ Lsg $v(t) = -\frac{g}{\lambda} + \left(v_0 + \frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ ✓

Bsp A $\boxed{\dot v = -g - \lambda v,\ v(0) = v_0}$

weiß nichts von e-Fkt

λ sei klein (($[\lambda] = \frac{1}{\text{Zeit}}$, $\lambda \ll \frac{g}{v_0}$))

$v(t) = v^{(0)}(t) + v^{(1)}(t) + \dots$, in ER einsetzen

$\dot v^{(0)} + \dot v^{(1)} + \dots = -g - \lambda(v^{(0)} + \dots)$, $v^{(0)}(0) + v^{(1)}(0) + \dots = v_0$

"ER$^{(0)}$" $\Rightarrow$ $\boxed{\dot v^{(0)} = -g,\ v^{(0)}(0) = v_0}$ $\Rightarrow$ $v^{(0)}(t) = v_0 - gt$

"ER$^{(1)}$" $\Rightarrow$ $\boxed{\dot v^{(1)} = -\lambda v^{(0)} = -\lambda v_0 + \lambda g t,\ v^{(1)}(0) = 0}$ $\Rightarrow$ $v^{(1)}(t) = -\lambda v_0 t + \lambda \frac{g}{2} t^2$

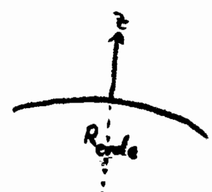
...

$\rightsquigarrow$ $v^{(0)} + v^{(1)} = (*)$. Es funktioniert!

Bsp B Wurfexperiment, um Abweichung von $K = -mg$ nachzuweisen

(Gravi: $m(R+z)^{\cdot\cdot} = -\gamma \frac{mM}{(R+z)^2}$, $g := \frac{\gamma M}{R^2}$)

$$\boxed{\ddot z = -\frac{gR^2}{(R+z)^2},\ \dot z(0) = v_0,\ z(0) = 0}$$



$\frac{1}{R}$ sei "klein". ((wogegen? z.B. gegen $\frac{1}{\text{Steighöhe}} = \frac{1}{v_0^2/2g}$

↪ aus E-Satz: $\frac{m}{2} v_0^2 + 0 = 0 + mgh$))

$$\ddot z^{(0)} + \ddot z^{(1)} + \dots = -g \frac{1}{\left(1 + \frac{z^{(0)}}{R} + \frac{z^{(1)}}{R} + \dots\right)^2} = -g\left(1 - 2\frac{z^{(0)}}{R} + \dots\right)$$

ER$^{(0)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot z^{(0)} = -g,\ \dot z^{(0)}(0) = v_0,\ z^{(0)}(0) = 0}$ $\Rightarrow$ $z^{(0)}(t) = v_0 t - \frac{g}{2} t^2$

ER$^{(1)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ddot z^{(1)} = 2g \frac{z^{(0)}}{R},\ \dot z^{(1)}(0) = 0,\ z^{(1)}(0) = 0}$ $\Rightarrow$ ...

usw.

— Ende § 5.4

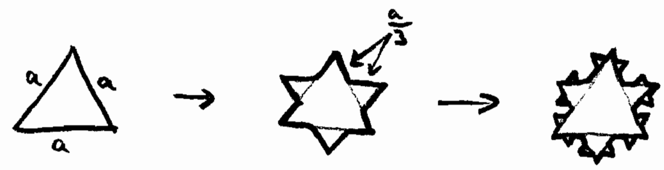
warum sind Reihenentw. (fast) immer möglich?

- weil wir nur mit Kombinationen aus $x, e^x, i, f_n, f(g), \pm, \cdot, \times, \partial_x, \int, \dots$ (SS 08) zu arbeiten verstehen
- weil die Natur "weich" ist

— Ende Kap. 5, Ende Klausur-Stoff —

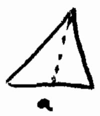
Potenzreihen: Koch'sche Schneeflocke

Konstruktionsvorschrift



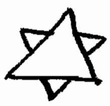
etc.

Frage: Flächeninhalt = ?

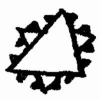


$$F(a) = \frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{4-1} = a^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$F_0 = F(a)$$



$$F_1 = F_0 + 3\cdot F\left(\frac{a}{3}\right)$$



$$F_2 = F_1 + 3\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3}\right)$$

$$F_3 = F_2 + 3\cdot 4\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3\cdot 3}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_\infty = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{a^2}{3^{2n}}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1$$

geom. Reihe! (5.42) $\left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right.$

$$= \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{8}{5} = a^2\,\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Frage: Umfang = ?

$$U_0 = 3a$$

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0$$

$$U_2 = \frac{4}{3}U_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0$$

$$\vdots$$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \quad\Rightarrow\quad U_\infty = \infty\ !$$