10. mittels $\boxed{i \cdot i = -1}$, $(ix)^2 = -x^2$, $(ix)^3 = -ix^3$

$$e^{ix} = \underline{1} + ix - \underline{\frac{x^2}{2!}} - i\frac{x^3}{3!} + \underline{\frac{x^4}{4!}} + i\frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \qquad \underline{\text{Euler'sche Formel}}}$$

$\cos(x) = [e^{ix}]_{\text{gerade}} = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\cos(ix) = \cosh(x)$

$\sin(x) = \frac{1}{i}[e^{ix}]_{\text{ungerade}} = \frac{1}{2i}(\quad - \quad)$, $\sin(ix) = i \cdot \sinh(x)$

11. Taylor-Reihe

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2c_2$, $f'''(0) = 2\cdot 3\, c_3$, ...

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n$$

((warum nicht gleich? oft unrentabel ; z.B. f'' zu Ü32(a) : ganze Seite))

Bsp: $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$

$$\underbrace{(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x}_{\text{oft gebraucht}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \dots$$

Zaubertrick zu Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \partial_b^n f(b) \Big|_{b=0} = e^{x\partial_b} f(b) \Big|_{b=0}$$

((generell: $e^{Op.} = 1 + Op. + \frac{1}{2!} Op.^2 + \dots$))

Entwickeln um $x = a$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\,(x-a)^n = e^{(x-a)\partial_b} f(b)\Big|_{b=a}$$

$$f(x+a) = e^{x\partial_b} f(b)\Big|_{b=a} = e^{x\partial_a} f(a)$$

$$f(x+a) = e^{a\partial_x} f(x) \equiv T_a f(x) \qquad (*)$$

$\uparrow$ "Translationsoperator" verschiebt Argument um $+a$

zwei (*)-Tests : • $f(x) = x^2$, $(x+a)^2 \stackrel{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)x^2 = x^2 + 2ax + a^2$, tatsächlich!

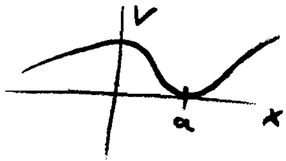
• $f(x) = e^x$, $e^{x+a} \stackrel{?}{=} (1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2}\partial_x^2 + \dots)e^x = e^x(1 + a + \frac{a^2}{2} + \dots) = e^x e^a$ ✓

Taylor-Anwendung in Physik:

meist nur bei allg. Betrachtungen

Potential

wie z.B. bei kleinen Schwingungen von V-Min. bei $x=a$:

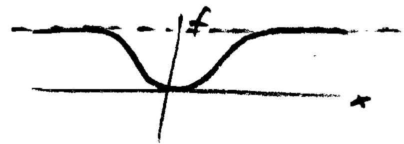


$$V(x) = \underbrace{\cancel{V(a)}}_{\text{egal in } V} + \underbrace{V'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{V''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots$$

$$m\ddot{x} = -\partial_x V(x) = -V''(a)(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{V''(a)}{m}}$$

Warnung $\quad f(x) = e^{-1/x^2}$



$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = (\dots) e^{-1/x^2}, \quad f''(0) = 0 \quad , \dots , \quad f^{(n)}(0) = 0$$

$$\text{Taylor} = 0 + 0 + 0 + \dots \neq f(x)$$

Grund: $x=0$ ist pathologische Stelle

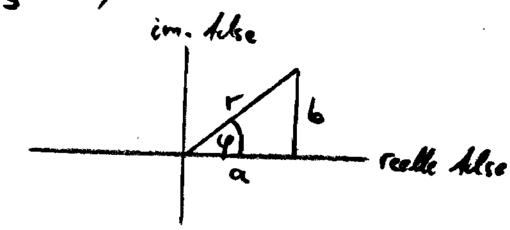
Komplexe Zahlen

sind i enthaltende Bildungen ($=: z$, z.B. $z = \frac{1}{2-3i}$)

können stets auf die Form $z = \underbrace{a}_{Re(z)} + i\underbrace{b}_{Im(z)}$ gebracht werden

(z.B. $z = \frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2}{13} + i\,\frac{3}{13}$)

können als Pkt in "komplexer Ebene" dargestellt werden:



mit $r = \sqrt{a^2+b^2} =: |z|$

ist $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = re^{i\varphi}$ $\quad$ (φ = "Phase")

$$z^* := a - ib = re^{-i\varphi}$$

$$2\,Re(z) = a+ib + a-ib = z + z^* =: z + c.c.$$

Auch $z = re^{i(\varphi + 2\pi n)}$ gilt ($n = 0, \pm1, \pm2, \dots$)

und ist bei Wurzeln wichtig:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi+2\pi n}{2}} = \sqrt{r}\, e^{i\begin{cases}\varphi/2 \\ \varphi/2+\pi\end{cases}} \quad :$$