jede Antwort-Matrix ist Tensor 2. Stufe   Verbindung $= m\vec r\times\vec v$

$\vec j = \underline{\sigma}\,\vec E \quad , \quad \vec k = -\underline{K}\,\vec r \quad , \quad \vec v = \underline{(\vec\omega\times\ )}\,\vec r \quad , \quad \vec L = \underline{I}\,\vec\omega$

Struktur: $\overrightarrow{\text{Antwort}} = (\text{Matrix})\ \overrightarrow{\text{Ursache}}$ ((Matrix diag ⇒ Gln entkoppeln ≙ einfach!))

$$\vec a = H\,\vec u \qquad (*)$$

Frage nach H' in $\vec a' = H'\vec u'$

D auf (*) anwenden: $\vec a' = D\vec a \overset{!}{=} DH\vec u = DHD^TD\vec u = \underbrace{DHD^T}_{\equiv H'}\vec u'$

$\Rightarrow (H' - DHD^T)\vec u' = \vec 0 \quad \forall \vec u'$

$\Rightarrow$ H ist Tensor 2. Stufe

(($\vec a = \vec u = \mathbb{1}\vec u$: auch $\mathbb{1}$ ist Tens. 2. St.))

⇝ ein linearer Zus.hang zw. 2 Vektoren definiert stets einen Tensor 2. Stufe

Bsp

z.B. Ziehen eines Schlittschuhläufers

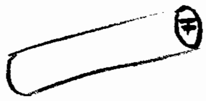
$\vec v = H\vec k$

jump ⇝ 4.3

Bsp σ: e^- im Draht

Ladungs-Stromdichte $\vec j = \dfrac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}\cdot\text{Fläche}\perp\vec e}\,\vec e$

(Energie - Teilchen - ..)



in Δt fließt durch F das Volumen $F\cdot(v\Delta t)$, und die Anzahl $\frac{N}{V}\cdot F(v\Delta t)$ Teilchen

$$\vec j = \frac{q\cdot\frac{N}{V}\cdot F\cdot v\,\Delta t}{\Delta t\ F}\,\vec e = q\frac{N}{V}\vec v = q\frac{N}{V}H_q\vec E =: \underline{\sigma}\vec E$$

"Leitfähigkeitstensor"

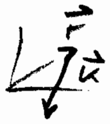
($\vec E$-Richtung so, daß $\vec j \parallel \vec E$?   s. 4.3 ; $j = \sigma E$

dann (Strom = Ladung pro Zeit = $F j$)

$$I = \underbrace{F\frac{\sigma}{L}}_{\frac{1}{\text{"Widerst."}}}\ \underbrace{L E}_{\text{"Spannung"}} = \frac{U}{R} \qquad \text{"Ohm"} \qquad))$$

Bsp $\mathcal{K}$:

Ursprung in Gleichgew.-Position



$\vec{K} = -\mathcal{K}\vec{r} + O(r^2)$

(($\vec{r}$-Richtung so, daß $\vec{K} \parallel \vec{r}$? s. 4.3))

existiert ein Potential $V(\vec{r})$?

2D: $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{pmatrix}$

$$\partial_x V \overset{!}{=} -K_1 = \kappa_{11} x + \kappa_{22} y \quad , \quad V = \frac{\kappa_{11}}{2} x^2 + \kappa_{12} xy + f(y)$$

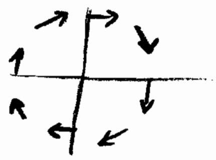
$$\partial_y V = \kappa_{12} x + f'(y) \overset{!}{=} -K_2 = \kappa_{21} x + \kappa_{22} y$$

$\Rightarrow$ <u>nur</u> für $\kappa_{12} = \kappa_{21}$ existiert $V = \frac{\kappa_{11}}{2} x^2 + \frac{\kappa_{22}}{2} y^2 + \kappa_{12} xy$

allg: $\mathcal{K} = \mathcal{K}^T \Leftrightarrow \vec{K} = -\mathcal{K}\vec{r}$ hat $V = \frac{1}{2}\vec{r}\mathcal{K}\vec{r}$

((der 2. Term in $\mathcal{K} = \frac{1}{2}(\mathcal{K} + \mathcal{K}^T) + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathcal{K} - \mathcal{K}^T)}$

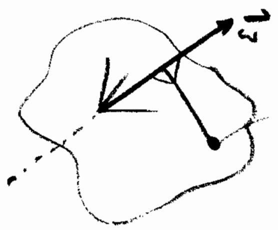
gibt rotierende Kraft: $\vec{K}_{2.\text{Term}} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \kappa_{12} - \kappa_{21} \\ \underbrace{\kappa_{21} - \kappa_{12}}_{\equiv 2\alpha} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



$= (\alpha y, -\alpha x)$))

Bsp $\mathcal{I}$: "Trägheitstensor"

starrer Körper
Achse $\vec{\omega}$ verlötet
Ursprung auf Achse



$$\vec{L} = \sum_a \vec{L}_a = \sum_a m_a \vec{r}_a \times \vec{v}_a =: \mathcal{I}\vec{\omega} \qquad \text{definiert } \mathcal{I}$$

falls $\vec{L}_a = \mathcal{I}_a \vec{\omega}$, dann $\vec{L} = \sum_a \mathcal{I}_a \vec{\omega}$, d.h. $\mathcal{I} = \sum_a \mathcal{I}_a$

(... Bsp $\underline{I}$)

$$\vec{L}_a = m_a \vec{r}_a \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_a) \stackrel{bac-cab\ :\ \vec{\omega}(\vec{r}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}\vec{\omega})}{=} \underbrace{m_a \left(r_a^2 \mathbb{1} - \vec{r}_a \circ \vec{r}_a \right)} \vec{\omega}$$

$$I_a \stackrel{!}{=} m_a \begin{pmatrix} r^2-x^2 & -xy & -xz \\ -yx & r^2-y^2 & -yz \\ -zx & -zy & r^2-z^2 \end{pmatrix} \text{ alles Index } a$$

$$\Rightarrow I = \sum_a m_a \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ & x^2+z^2 & -yz \\ \text{sy.} & & x^2+y^2 \end{pmatrix}_a$$

es ist $\vec{L}' = I' \vec{\omega}'$ mit $I' = DID^T$

((denn: $\vec{L}' = D\vec{L} = DI\vec{\omega} = DID^T D \vec{\omega} = I'\vec{\omega}'$))

(($\vec{\omega}$ so, daß $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$? d.h. daß $I\vec{\omega} = \text{const}\cdot\vec{\omega}$? s. 4.3))

Philo: I-Komponenten hängen von Position des Körpers, und damit i.A. von der Zeit ab.
→ Drehmomente $\partial_t \vec{L} = \vec{r} \times \vec{K}$ machen Achsen-Lager kaputt! "Auswuchten ≙ Achse ∥ Hauptachse"

Schwerpkt des st. Kö.: $M = \sum_a m_a$

$$\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_a m_a \vec{r}_a$$

4.3. Hauptachsentransformation

gegeben: ein symm. Tensor H, d.h. $H^T = H$

Beh.: stets existiert (mind.) ein D derart, daß

$$H' = DHD^T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$, d.h. H' diagonal wird.

Frage: $D = ?$

Frage clever aufschreiben: suche $\vec f$'s in

$$\begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec f_1- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ H\vec f_1 & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \vec f_1 H \vec f_1 & \vec f_1 H \vec f_2 & 1\ 3 \\ \vec f_2 H \vec f_1 & \vec f_2 H \vec f_2 & 2\ 3 \\ \vec f_3 H \vec f_1 & 3\ 2 & 3\ 3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ es muß $H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1$, $H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$, ... sein

$\Rightarrow$ müssen also $H\vec f = \lambda \vec f$ lösen

und 3 orthonormierte $\vec f$'s mit je zugehörigen reellen λ's erhalten.

Das geht immer, denn:

A) $\vec f$ ist normierbar ($H\vec f = \lambda \vec f$ legt Betrag nicht fest)

B) $\vec f$'s zu verschiedenen λ's sind automatisch orthogonal:

$H\vec f_1 = \lambda_1 \vec f_1 \quad \Rightarrow \quad 0 = H\vec f_1 - \lambda_1 \vec f_1$ multipl. m. $\vec f_2$ v. links

$$0 = \underbrace{\vec f_2 H \vec f_1}_{=(H^T\vec f_2)\vec f_1 \,=\, (H\vec f_2)\vec f_1 \,\stackrel{!}{=}\, \lambda_2 \vec f_2 \vec f_1} - \lambda_1 \vec f_1 \vec f_2 \qquad H\vec f_2 = \lambda_2 \vec f_2$$

$$= (\lambda_2 - \lambda_1)\, \vec f_1 \vec f_2 \qquad \text{q.e.d.}$$

C) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ können (ohne $\vec f$-Kenntnis) aus einer kubischen Gl. erhalten werden, denn das hom. Gl.-Syst $(H - \lambda \mathbb{1})\vec f = \vec 0$ ist nur lösbar, wenn

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} H_{11}-\lambda & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22}-\lambda & H_{23} \\ H_{13} & H_{23} & H_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 (H_{11} + H_{22} + H_{33}) - \lambda (H_{11}H_{22} + H_{11}H_{33} + H_{22}H_{33}) + \det(H)$$

$\stackrel{!}{=} 0$ ist.

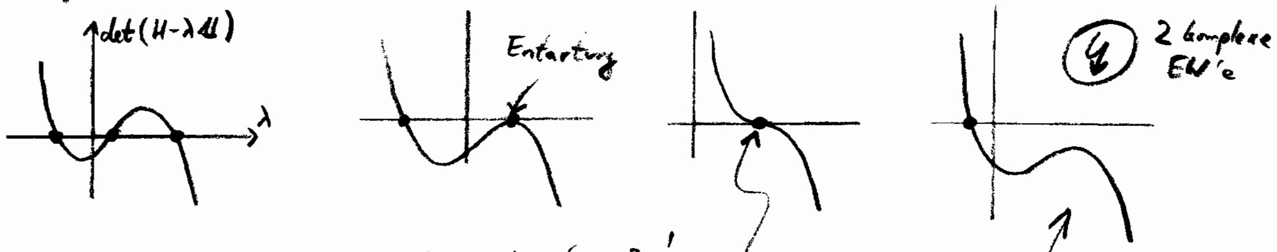
(($\begin{pmatrix} -\vec a- \\ -\vec b- \\ -\vec c- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | \\ \vec f \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heißt $\vec a \vec f = \vec b \vec f = \vec c \vec f = 0$ zu erfüllen.

$\vec f \neq \vec 0$ nur möglich, wenn $\vec a, \vec b, \vec c$ in einer Ebene,

d.h. Spatprodukt = Determinante = 0))

$$\stackrel{!}{=} (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda)$$

Möglichkeiten:



((z.B. $H=\mathbb{1}$, $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (1-\lambda)^3 \overset{!}{=} 0$;
$\lambda=1$ ist dreifach entartet))

((In $\det(H-\lambda\mathbb{1}) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda^2-2p\lambda+q) = 0$
und in $\lambda_{2,3} = p \pm \sqrt{p^2-q}$ könnte $q>p^2$ sein.
Dann ist i nötig, $i\cdot i=-1$, und $\lambda_{2,3} = p \pm i\sqrt{q-p^2}$))

D) die EW $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind reell, d.h. 4 tritt nie ein; denn:

$$H\vec{f} = \lambda\vec{f} \Rightarrow \lambda\vec{f}^*\vec{f} = \vec{f}^* H\vec{f} = (H^T\vec{f}^*)\vec{f} = \lambda^*\vec{f}^*\vec{f}$$
$$\Rightarrow \lambda = \lambda^* \quad ((\lambda = a+ib = a-ib = \lambda^* \Rightarrow b=0))$$

((Größe* = Größe$\big|_{i\to -i}$))

E) bei Entartung ($\frac{2}{3}$ λ's gleich) ist ein orthonormiertes
$\frac{2}{3}$-Bein wählbar:

$$\left.\begin{array}{l} H\vec{f}_1 = \lambda\vec{f}_1 \\ H\vec{f}_2 = \lambda\vec{f}_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{jede LK aus } \vec{f}_1, \vec{f}_2 \text{ ist EV zu EW } \lambda \\ \Rightarrow \text{also wähle zu } \lambda \text{ zwei orthogonale } \vec{f}\text{'s}\end{array}$$
$$H\vec{f}_3 = \lambda_3\vec{f}_3$$

HT-Rezept

I $H=H^T$ erfüllt? (sieht man: H symmetrisch)

II löse $\det(H-\lambda\mathbb{1})=0$
(kubische Glg: λ_1 raten. dann $\det = (\lambda_1-\lambda)$(quadr. Glg.))

III Probe: $Sp(H) \overset{?!}{=} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$ (und auch: $\det(H) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$)

IV löse $(H-\lambda_1\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_1$. normiere $\vec{f}_1$ ($|\vec{f}_1|=1$).
dito für λ_2. dito für λ_3.

V Probe: Orthogonalität, d.h. $\vec{f}_1\vec{f}_2 = \vec{f}_1\vec{f}_3 = \vec{f}_2\vec{f}_3 = 0$

VI Rechtssystem? (evtl ein $\vec{f}$-Vorzeichen ändern) (a) malen (b) $\vec{f}_3 = \vec{f}_1\times\vec{f}_2$ (c) $\det(D) = +$

VII Resultat notieren: $H' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} - & \vec{f}_1 & - \\ - & 2 & - \\ - & 3 & - \end{pmatrix}$