Drehachse und -winkel

$$DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$$D^TD = \begin{pmatrix} -\vec{e}_1'- \\ -2- \\ -3- \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_1' & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ Orthonormierung : $DD^T = D^TD = \mathbb{1}$

Rechtssystem erhalten: $\det(D) = 1$ (denn: $\det(D) = f_1 (\vec{f}_2 \times \vec{f}_3)$, s. Spatprodukt Kap. 1; Skript S. 9)

Winkeltreue : $D(\vec{a}\times\vec{b}) = (D\vec{a}) \times (D\vec{b})$

$D \to$ Achse $\vec{e}$: $D\vec{b} = \vec{b}$, $\vec{e} = \vec{b}/b$

$D \to$ Winkel φ : $Sp(D) = 1 + 2\cos(\varphi)$

$\vec{e}\cdot\left((D\vec{f})\times\vec{f}\right) = \sin(\varphi)$ mit $\vec{f}$ Einheitsvektor $\perp \vec{e}$

$$\vec{e},\varphi \to D \quad : \quad D = \underset{\uparrow \cos(\varphi)}{c}\,\mathbb{1} + (1-c)\,\vec{e}\circ\vec{e} - \underset{\uparrow \sin(\varphi)}{s}\,(\vec{e}\times\ldots) \qquad (*)$$

Strategie : $(*)$ verifizieren $\to$ Rest folgt.

$(*)$ ist vektoriell formuliert, also genügt Nachweis eines Spezialfalles.

zu z.B. $\vec{e} = (0,0,1)$

ist $\vec{e}\circ\vec{e} = \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix}$ und $(\vec{e}\times\ldots) = \begin{pmatrix} 0&-1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

und somit $(*)_{rhs} = \begin{pmatrix} c&0&0 \\ 0&c&0 \\ 0&0&c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&1-c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0&s&0 \\ -s&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} c&s&0 \\ -s&c&0 \\ 0&0&1 \end{pmatrix} = D_{z,\varphi}$ qed.

q.e.d.
quod erat demonstrandum
was zu zeigen war

$\vec{e} = (u,v,w)$ liefert die allgemeine Drehmatrix:

$$D_{allg} = \begin{pmatrix} c+(1-c)u^2 & (1-c)uv+sw & (1-c)uw-sv \\ (1-c)vu-sw & c+(1-c)v^2 & (1-c)vw+su \\ (1-c)wu+sv & (1-c)vw-su & c+(1-c)w^2 \end{pmatrix}$$

aus Dally folgen nun die restlichen Eigenschaften S.27 oben:

z.B. $Sp(D) = 3c + (1-c)\underbrace{(u^2+v^2+w^2)}_{=1} = 1 + 2c$ (immer!)

$D \to$ Achse : Eigenwertproblem

$(D - \mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist homogenes Gl. system

legt $|\vec{b}|$ nicht fest, also ist (zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$)

eine der 3 Gln $(D-\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ abhängig (folgt aus den beiden anderen)

$(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des Eigenwertproblems,

d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Op-Anw. reproduzieren:

(lin. Op.)(Element) = Faktor (gleiches Element)

$$\underset{\substack{\nearrow \\ \text{gegeben}}}{H} \; \underbrace{\vec{\psi} = E \; \vec{\psi}}$$

gesucht: Eigenvektor (EV) $\vec{\psi}$
Eigenwert (EW) E

((z.B. hat $-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2$ die EV $\sim$ trig(kx) mit EW $E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$))
(((Begr. der QM: $i\hbar\dot{\psi} = H\psi$)))

hier: eine Drehmatrix hat stets den EW $+1$
und die Drehachse als zugehörigen EV.

eine Vektor-Def.

vgl. Kap. 1; Skript S. 2

Tripel a_j sind **Vektoren**, wenn unter Koord.-System-Drehung (D) die Abänderung der Elemente in $a_j' = D_{jk}a_k$ (sowie Addition und λ-Multiplikation) physikalisch sinnvoll ist

((also: Vektoren oder "Pfeile" sind Koordinaten-Dreh-anfällige Schattenspender gemäß $\vec{a}' = D\vec{a}$))

Einschub

Matrix A. Komp. A_{ij}

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \quad , \quad A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

sy $A = A^T$, antisy $A = -A^T$

$\vec{e} \circ \vec{e} =$?

Bsp $\vec{e}_3 = (0,0,1)$; $(\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3)_{ij} = (\vec{e}_3)_i (\vec{e}_3)_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{ij}$

$(\vec{e}_3)_j = \delta_{3j}$ ((Kronecker-Delta : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$))

$$(\vec{e}_3 \circ \vec{e}_3)_{ij} = \delta_{3i} \delta_{3j}$$

$\vec{a} \times \_ =$? $\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ & 0 & -a_1 \\ \text{asy} & & 0 \end{pmatrix}$

Dreh $DD^T = \begin{pmatrix} - \vec{f}_1 - \\ - \vec{f}_2 - \\ - \vec{f}_3 - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D^T D$

Preisfrage : $D^T =$? $\varphi \to -\varphi$!

Test w/ D_x, D_y, D_z

$c(-\varphi) = c(\varphi)$, $s(-\varphi) = -s(\varphi)$

Diag : $1, c$ ✓ Off-Diag : s ✓

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (D\vec{a}) \cdot (D\vec{b}) = D_{jk} a_k \, D_{jl} b_l = a_k \underbrace{D^T_{kj} D_{jl}}_{\stackrel{!}{=} \delta_{kl}} b_l = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

Also $\vec{e}$ (3-1 = 2 Zahlen) , Winkel φ (1 Zahl)

$\Leftrightarrow$ Matrix D (9 Zahlen !) <u>und</u> $DD^T = \mathbb{1}$ (9-3 = 6 Gleichungen) ✓

4.2 Tensoren 2. Stufe

$H_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ ist Tensor n-ter Stufe $\Leftrightarrow$ die Elemente bei Ko-Syst Drehung (D) übergehen in

$$H'_{j_1 \cdots j_n} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} \cdots D_{j_n k_n} H_{k_1 \cdots k_n}$$

Stufe n	Name	Schema	Transformation
0	Skalar	eine Zahl c	$c' = c$
1	Vektor	Tripel $\vec{a}$	$\vec{a}' = D\vec{a}$
2	Tensor 2.St.	Matrix H	$H' = D H D^T$ (s.u.)
3	z.B. ε_{ijk}	Kubus	s.o.

<u>n=0</u> Skalare sind m, q, c, Temp T, $V(\vec{r})$, $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$, $Sp(H)$ ((s.u.)), $\det(H)$ ((s.u.))

<u>n=1</u> Vektoren, s. halbes WS

<u>n=2</u> Tensoren 2. Stufe

$$H'_{j_1 j_2} = D_{j_1 k_1} D_{j_2 k_2} H_{k_1 k_2} = D_{j_1 k_1} H_{k_1 k_2} (D^T)_{k_2 j_2}$$

d.h. $\quad H' = D H D^T$

((verstehen jetzt: $Sp(H') = Sp(DHD^T) = Sp(HD^TD) = Sp(H)$

und $\det(H') = \det(D)\det(H)\det(D^T) = \det(H)$))

<u>Philo</u>: Waren immer stolz auf vektoriell formulierte Zus-hänge. Respektieren die Invarianz der Natur unter Ko-Syst-Drehungen. Jede Natur-Größe muß sich <u>verhalten</u> unter Drehungen, ist also Skalar oder Vektorkomp. oder Tensorkomp.

$$\boxed{\text{Jede phys. Größe ist als Komponente eines Tensors zu identifizieren}}$$