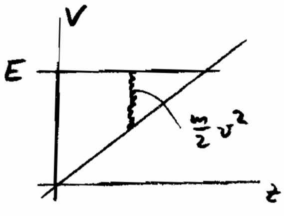
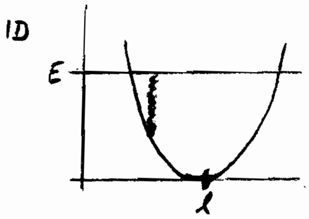
V's addieren sich, weil sich $\vec{K}$'s addieren:

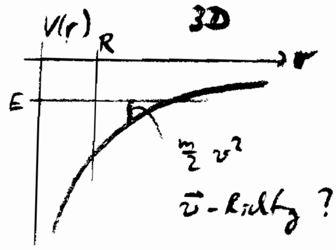
$$\vec{K} = -(\partial_x V, \dots, \dots)$$
$$\vec{F} = -(\partial_x W, \dots, \dots)$$
$$\vec{K} + \vec{F} = -(\partial_x (V+W), \dots, \dots)$$

Gesamtpotential eines T.-Systems = $\Sigma$ seiner V's.

v²-Ablesen $\qquad \frac{m}{2} v^2 = E - V$

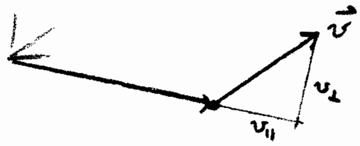



effektives Potential

$$v^2 = v_\parallel^2 + v_\perp^2$$

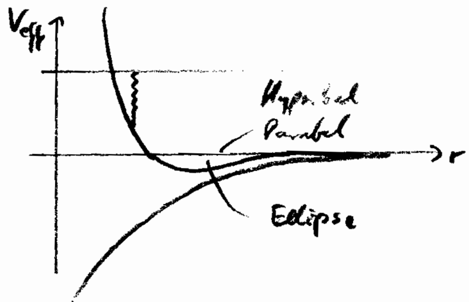



$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times \vec{v}_\perp$$
$$L = |\vec{L}| = m r v_\perp$$
$$\dot{r} = \partial_t \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \vec{e}_r \vec{v} = v_\parallel$$ (vgl. Skript S.15, Ende Kap. 2)

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}\right) + V(r)$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{mit } V_{eff}(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)}$$ ((3D Bewegung → 1D reduziert!))

Bsp zu $V(r) = -\frac{\gamma m M}{r}$




---

Newton regiert die Welt: Kräfte bekannt, weiter per $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$: Zukunft liegt fest. (Laplace'scher Dämon)

# 4. Tensoren

Fremdwort ?

zur Beruhigung: Vektor = Tensor 1. Stufe ; 2. Stufe , ...

( " , " , " ) $\begin{pmatrix} " & " & " \\ " & " & " \\ " & " & " \end{pmatrix}$

Vektoren sind "Pfeile".

aber was ist ein "Pfeil" ?

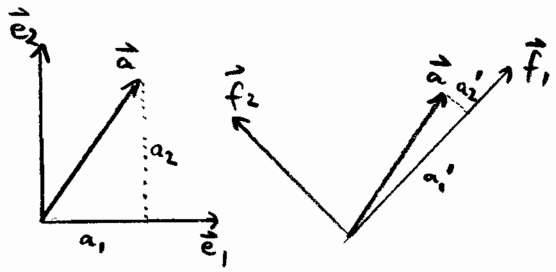
→ etwas, was im gedrehten System andere Schatten bekommt.

## 4.1 Drehmatrix

Koord.-System-Drehung.

Pfeil bleibt stehen.

Komponenten ändern sich.



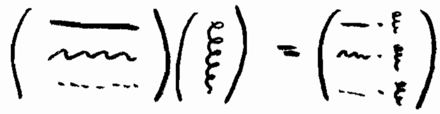

"$\vec a'$" := $(a_1', a_2', a_3')$

(hier: Vektoren vertikal aufschreiben von Vorteil)

$$\vec a' = \begin{pmatrix} a_1' = \vec f_1 \vec a_1 \\ a_2' = \vec f_2 \vec a_1 \\ a_3' = \vec f_3 \vec a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec f_1 \vec e_1 a_1 + \vec f_1 \vec e_2 a_2 + \vec f_1 \vec e_3 a_3 \\ \vec f_2 \vec e_1 a_1 + \dots \\ \underbrace{\vec f_3 \vec e_1 a_1 + \vec f_3 \vec e_2 a_2 + \vec f_3 \vec e_3 a_3}_{(\vec f_3 \vec e_1,\, \vec f_3 \vec e_2,\, \vec f_3 \vec e_3)\cdot \vec a} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec f_1 \vec e_1 & \vec f_1 \vec e_2 & \vec f_1 \vec e_3 \\ \vec f_2 \vec e_1 & \dots & \dots \\ \vec f_3 \vec e_1 & \vec f_3 \vec e_2 & \vec f_3 \vec e_3 \end{pmatrix}}_{= D} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

= Matrix $D$ angewandt auf $\vec a$

d.h. $D$-Zeile $\cdot \vec a$, nach "Zeile mal Spalte"-Regel:

allg. 

Operator · Element = neues Element

kürzer: $\vec a' = D\vec a$, $D = \begin{pmatrix} - \vec f_1 - \\ - \vec f_2 - \\ - \vec f_3 - \end{pmatrix}$

D-Zeilen: $\vec f$'s im alten System

D-Spalten: $\vec e$'s im neuen

Zeile Spalte

kurz: $a_j' = D_{jk} a_k$, $D_{jk} = \vec f_j \cdot \vec e_k$

es ist $(D\lambda\vec{a})_j = D_{jk}\lambda a_k = (\lambda D_{jk})a_k = \lambda(D\vec{a})_j$

allg.: $\lambda \cdot \text{Matrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & .. & .. \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$

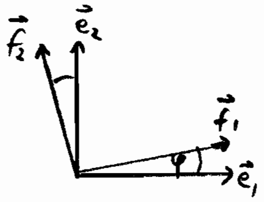
es ist $(D(\vec{a}+\vec{b}))_j = D_{jk}(a_k+b_k) = D\vec{a} + D\vec{b}$

$\Rightarrow$ Matrix-Anwendung ist <u>lineare</u> Operation.

## 3 elementare D's

$c := \cos(\varphi)$ $\quad s := \sin(\varphi)$

Drehung um Winkel $\varphi$ um z-Achse

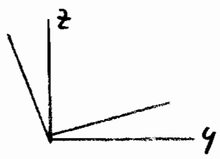



$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

" um y-Achse


$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

" um x-Achse




$$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

## 2 Drehungen nacheinander


$$\vec{g}\text{'s} \xleftarrow{(2)} \vec{f}\text{'s} \xleftarrow{(1)} \vec{e}\text{'s}$$
$$\vec{a}'' \qquad \vec{a}' \qquad \vec{a}$$

$\vec{a}'' = D^{(2)}\vec{a}'$ , $\vec{a}' = D^{(1)}\vec{a}$

$= D^{(2)}(D^{(1)}\vec{a}) = „D^{(2)}D^{(1)}" \vec{a}$ ?

$$a''_j = D^{(2)}_{jl}(\ldots)_l = \underbrace{D^{(2)}_{jl} D^{(1)}_{lk}}_{D^{\text{ges.}}_{jk}} a_k$$

$D^{\text{ges.}}_{jk} = \begin{pmatrix} j\text{-te Zeile} \\ \text{von } D^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } D^{(1)} \end{pmatrix}$

allg.

$(AB)_{jk} = A_{jl}B_{lk}$

Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$ !

## Spur

$Sp(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = A_{jj}$

$Sp(AB) = Sp(BA)$

denn: $(AB)_{jj} = A_{jk} B_{kj} = B_{kj} A_{jk} = (BA)_{kk}$

also: $Sp(ABC) = Sp(CAB)$ "zyklische Invarianz der Spur"

## Umgang mit Matrizen

1. $(A\vec{a})_j = A_{jk} a_k$
2. $(AB)_{jk} = A_{jl} B_{lk}$
3. $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
4. $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$
5. $Sp(A) = A_{jj} \Rightarrow Sp(AB\ldots C) = Sp(B\ldots CA)$
6. $\det(A) = \varepsilon_{jkl} A_{1j} A_{2k} A_{3l}$

   $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (Zitat)
7. $(A^T)_{jk} := A_{kj}$ , $A^T = A \Leftrightarrow A$ ist "symmetrisch"

   $A^T = -A \Leftrightarrow A$ ist "antisymmetrisch"

   $\Rightarrow \vec{b}\cdot(A\vec{a}) = (A\vec{a})\cdot\vec{b} \stackrel{!}{=} \vec{a} A^T \vec{b}$

   denn: $A_{jk} a_k b_j = a_k (A^T)_{kj} b_j$

   Anwendung: $\vec{a}'^2 = (D\vec{a})\cdot D\vec{a} = \vec{a} \underbrace{D^T D}_{=1} \vec{a} = \vec{a}^2$, s. unten

   $\vec{a}'\cdot\vec{b}' = \vec{a} D^T D \vec{b} = \vec{a}\vec{b}$ "Invarianz des Skalarprod. unter Drehung"
8. $A^{-1} :=$ die $A^{-1}A = \mathbb{1}$ erfüllende Matrix
9. Dyadisches Produkt $(\vec{a}\circ\vec{b})_{jk} := a_j b_k$

   $\Rightarrow [(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c}]_j = (\vec{a}\circ\vec{b})_{jk} c_k = a_j b_k c_k = [\vec{a}\cdot(\vec{b}\vec{c})]_j$

   kurz: $(\vec{a}\circ\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$
10. $(\vec{a}\times\ldots) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$

    denn: $(\vec{a}\times\ldots)\,\vec{b} = \begin{pmatrix} \text{"} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \vec{a}\times\vec{b}$ ✓