1D harmonischer Oszillator

$K_1 = -\kappa x$

ER: $\boxed{\ddot{x} = -\frac{\kappa}{m}x ,\quad \dot{x}(0) = v_0 ,\quad x(0) = 0}$, $x(t) = ?$

Ansatz: $x(t) = A\sin(\omega t)$ (($+ B\cos(\omega_2 t)$ brauchen wir nicht, wg. $x(0) \stackrel{!}{=} 0$))

$\Rightarrow \dot{x} = A\omega\cos(\omega t) , \quad \ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t)$

Bwgl erfüllen: $-A\omega^2\sin(\omega t) \stackrel{!}{=} -\frac{\kappa}{m}A\sin(\omega t) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$

AB erfüllen: $\dot{x}(0) = A\omega \stackrel{!}{=} v_0 \Rightarrow A = v_0\sqrt{\frac{m}{\kappa}}$

$x(0) \stackrel{!}{=} 0$ ✓✓ macht Ansatz automatisch

$$\Rightarrow \underline{\underline{x(t) = v_0\sqrt{\frac{m}{\kappa}}\sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,t\right)}}$$

behandle nun (möglichst) allg. Folgerungen aus $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}(\vec{r},\dot{\vec{r}},t)$

- $\vec{p}$ und $\vec{L}$

"Wucht" = Impuls = $\vec{p} := m\vec{v}$

bisher hatten wir konstante Masse $m = const_t$ angenommen.

allgemeiner lautet die Newton'sche Bwgl: $\boxed{\dot{\vec{p}} = \vec{K}}$

((check: wenn $m = const_t$, dann $\vec{K} = \dot{\vec{p}} = \partial_t(m\dot{\vec{r}}) = m\ddot{\vec{r}}$))

↳ [sonst: s. Ü16]

Impulserhaltung: $\dot{\vec{p}} = 0 \Leftrightarrow \vec{K} = \vec{0}$ (langweilig!)

mehrere Teilchen, Gesamtimpuls $\vec{P} = \sum_{a=1}^{N} \vec{p}_a$

$$\dot{\vec{P}} = \sum_a \dot{\vec{p}}_a = \sum_a m_a \ddot{\vec{r}}_a = \sum_a \vec{K}_{auf\,a}$$

"Drehwucht" = Drehimpuls $= \vec L := \vec r \times \vec p = m\vec r \times \vec v = m\vec r \times \vec v_\perp$

[(

$\vec L = \vec e_3\, r m v_\perp = m\vec r \times \vec v_\perp = m \vec r \times \vec v$.

ein Teilchen hat $\vec L$ auch ohne Stange)]

$\vec L$ ist vom Ursprung abh.!

$$\partial_t \vec L = m\dot{\vec r} \times \vec v + m\vec r \times \dot{\vec v} = 0 + \vec r \times \vec K$$

"Drehmoment"

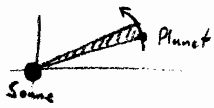
(allg., egal wo Ursprung ist)

wenn $\vec K \sim \vec r$ (oder $\vec r = 0$, oder $\vec K = 0$) ("Zentralkraft": $\vec K = K(\vec r)\frac{\vec r}{r}$), dann

$\dot{\vec L} = 0$, d.h. $\vec L = \overrightarrow{\mathrm{const}_t}$

"Drehimpulserhaltung" für 1 T. ((s. auch Ü5))

Flächensatz (Kepler 1571-1630, Newton 1643-1727)



Planet (m) um Sonne (= Ursprung)

$\vec L$ behält Richtung (m bleibt in Ebene $\perp \vec L$) und Betrag

$$\mathrm{const}_t = \frac{1}{2m}|\vec L| = \frac12 |\vec r \times \vec v| = \frac12 r v_\perp = \frac{r \cdot dr_\perp}{2\, dt} = \frac{d\,\text{Fläche}}{dt}$$

T und V

Wollen "Energie" einer Physik ergründen — multiplizieren daran Bew.gl. mit der einmal weniger abgeleiteten Unbekannten.

Hier: $\vec v \cdot [\, m\ddot{\vec r} = \vec K \,]$

$$m\vec v \cdot \dot{\vec v} = \vec v \cdot \vec K$$

$$\left(\frac m2 \vec v^2\right)^{\cdot} = \frac{d\vec r \cdot \vec K}{dt} = \frac{dA}{dt}$$

mit dA = am T. in dt verrichtete Arbeit

Energiezufuhr erhöht also die Größe

$$\frac m2 \vec v^2 =: T = \text{kinetische Energie}$$

Kann man auch $\vec v \cdot \vec K$ = (etwas)$^{\cdot}$ schreiben?

"Potential" ("pot. E.")

wenn es zu gegebenem $\vec K(\vec r)$ eine Hilfsfunktion $V(\vec r)$
derart gibt, daß $\vec K(\vec r) = -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$ ((= $-\vec\nabla V$))
gilt, dann ist $\vec v \cdot \vec K = -\vec v \cdot (\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V) = -\partial_t V(\vec r(t))$
und folglich $\partial_t (T+V) = 0$
und somit $\frac m2 \dot{\vec r}^2(t) + V(\vec r(t)) = \mathrm{const}_t = E$

("Energieerhaltungssatz" der Mechanik eines Tlp.)

Gebrauch der Erhaltungssätze:

$$\vec P_{\text{vor Stoß}} = \vec P_{\text{nach Stoß}}$$
$$\vec L_{\text{start}} = \vec L_{\text{später}}$$
$$(T+V)_{\text{start}} = (T+V)_{\text{später}}$$

V's A) $\vec K = (0,0,-mg) \overset{?!}{=} -(\partial_x V, \partial_y V, \partial_z V)$

V unabh. von x, y ; $V'(z) = mg$, $V(z) = mgz + C^{\text{egal}}$

wähle $C = 0$ $\Rightarrow$ $V(z) = mgz$

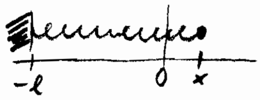
((allg.: $[V]$ = Kraft · Länge = Energie

mühsame Positionsänderung erhöht V

manchmal ist E-Satz schneller als Bew.gl.-Lösen))

B) "ideale Feder" := { hat keine Masse, keine Eigenschwing., erfüllt $a = r$ perfekt, hat Daten κ, ℓ }

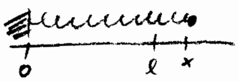
(Kraft = κ · Ausdehnung)



$K_1 = -\kappa x \overset{?!}{=} -\partial_x V(x)$

$\Rightarrow V(x) = \frac{\kappa}{2} x^2 \cancel{+C}$

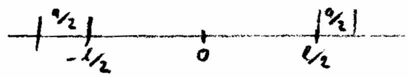
Translation um $+\ell$, $x \to x-\ell$



$K_1 = -\kappa(x-\ell)$

$V(x) = \frac{\kappa}{2}(x-\ell)^2$

[V ist über Feder verteilt: Hälfte hat 2κ

($\kappa \cdot a = K = \kappa_{\text{Hälfte}} \cdot \frac{a}{2}$, )

und es ist tatsächlich $V = \frac{\kappa}{2}a^2 \overset{?!}{=} 2\,\frac{(2\kappa)}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$

... weiter halbieren, bis zu atomaren Ausdehnungen.]

Folglich hat $\vec K = \vec e_{m \to Bef.}\, \kappa\, (r_{mB} - \ell)$ typ.

das Potential $V = \frac{\kappa}{2}(r_{mBf.} - \ell)^2$

(check: per $-(\partial_x V, \dots, \dots)$ zu $\vec K$ gelangen!)

c) $\vec{K} = -\gamma m M \frac{\vec{r}}{r^3} \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V, -\partial_z V)$

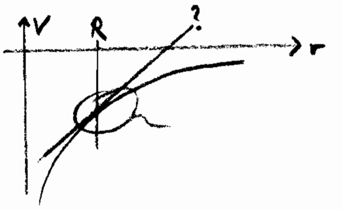
Ansatz: $V(\vec{r}) = f(r)$

$-\partial_x V = -f'(r) \cdot \partial_x \sqrt{x^2+y^2+z^2} = -f'(r)\frac{x}{r} \overset{!}{=} -\gamma m M \frac{x}{r^3}$

$\Rightarrow f'(r) = \frac{\gamma m M}{r^2}$, $f = \frac{c}{r}$, $f' = -\frac{c}{r^2}$, $c = -\gamma m M$, $f = -\frac{\gamma m M}{r}$ +

$\Rightarrow \underline{V(\vec{r}) = -\frac{\gamma m M}{r}}$ "Gravitations-Potential"

(( , $z \ll R$, $V = -\frac{\gamma m M}{R+z} = -\frac{\gamma m M (R-z)}{R^2 - z^2} \approx const_z + m \overset{=g}{\frac{\gamma M}{R^2}} z + O(z^2)$



oder: durch Reihenentwicklung

$\frac{1}{R+z} = \frac{1}{R} + Az + O(z^2)$

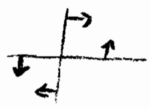
$1 \overset{!}{=} (R+z)\left(\frac{1}{R} + Az + \dots\right)$

$= 1 + RAz + \frac{z}{R} + O(z^2)$

$\Rightarrow A = -\frac{1}{R^2}$))

D) komponentenweises Aufleiten [s.a. Ü18]

D1) 2D, $\vec{K}(\vec{r}) = (\alpha y, \alpha x) \overset{?!}{=} (-\partial_x V, -\partial_y V)$



$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha y \Rightarrow V = -\alpha x y + f(y)$

$\partial_y V = -\alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x \Rightarrow f = const_{x,y}$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = -\alpha x y}}$

D2) $\vec{K} = \alpha(x-y, x-y)$

$\partial_x V \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$, $V = -\frac{\alpha}{2}x^2 + \alpha x y + f(y)$

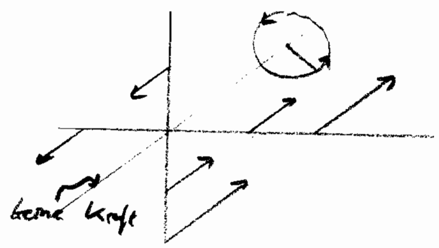
$\partial_y V = \alpha x + f'(y) \overset{!}{=} -\alpha x + \alpha y$ nicht erfüllbar!

$\vec{K}$ hat kein V.

E-Satz gilt nicht:

Pendel-E nimmt zu

(es gibt solche $\vec{K}$'s)



Bemerkung: $\vec{K}$ hat V $\Leftrightarrow$ sich auf der $\vec{K}$-"Strömung" nichts dreht

(SS: rot $\vec{K} = \vec{0} = \nabla \times \vec{K}$)