Ein (irgendwie durch den Raum eiernder) starrer Körper hat stets ein $\vec\omega$, denn 3 Punkte legen seine Position fest, und es ist

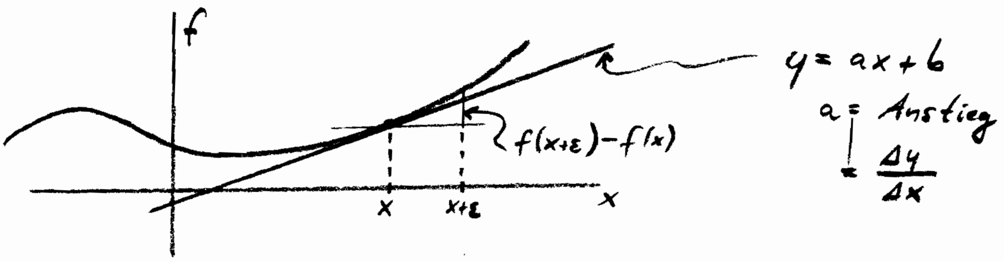
$$\vec\omega = \frac{(\vec v_1-\vec v_3)\times(\vec v_1-\vec v_2)}{(\vec v_1-\vec v_3)\cdot(\vec r_1-\vec r_2)} \qquad \text{wegen bac-cab.}$$

(($\overrightarrow{\text{Zähler}} \overset{!}{=} (\vec v_1-\vec v_3)\times\left(\vec\omega\times(\vec r_1-\vec r_2)\right)$

$\overset{!}{=} \vec\omega\cdot\underbrace{\left((\vec v_1-\vec v_3)\cdot(\vec r_1-\vec r_2)\right)}_{\overset{!}{=}\text{Nenner}} - (\vec r_1-\vec r_2)\underbrace{\left((\vec v_1-\vec v_3)\cdot\vec\omega\right)}_{\overset{!}{=}0}$))

Differenzieren (Ableitung bilden)

einfach. Sie können es schon: malen. Tangente, Anstieg.



Def. $\boxed{\text{Ableitung von } f(x) \text{ bei } x = f'(x) := \text{Anstieg der Kurve bei } x}$

per Rechnung: $\boxed{f'(x) \overset{!}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \quad \text{"Differentialquotient"} \qquad f' = \frac{df}{dx} = \partial_x f(x)}$

"Limes" ≙ Grenzwert

verstehen? Wie immer mit Bsp. (bitte $\lim_{\varepsilon\to 0}$ hinzudenken)

(A) $\partial_x x^3 = \frac{(x+\varepsilon)^3 - x^3}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\cancel{x^3} + 3x^2\varepsilon + \underbrace{3x\varepsilon^2+\varepsilon^3}_{\overset{!}{=}\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - \cancel{x^3}\right) = 3x^2$

nützliche Notation: $\mathcal{O}(\eta) :=$ etwas $\sim \eta$ bei $\eta\to 0$ gegen Null gehendes

(B) $\partial_x \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x+\varepsilon}-\sqrt{x}}{\varepsilon} = \frac{\cancel{x}+\varepsilon-\cancel{x}}{\varepsilon(\sqrt{x+\varepsilon}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(C) $\partial_x \frac{1}{x} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{x+\varepsilon}-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\frac{x-(x+\varepsilon)}{(x+\varepsilon)x} = -\frac{1}{x^2}$

(D) $\partial_x x^{n/m} = \frac{1}{\varepsilon}\Big(\underbrace{(x+\varepsilon)^{n/m}}_{=:\, x^{n/m}+a\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - x^{n/m}\Big)$, $(x+\varepsilon)^n = \left(x^{n/m}+a\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\right)^m$,

$x^n + n x^{n-1}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = x^n + m x^{\frac{n}{m}(m-1)} a\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

$\Rightarrow a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

$= a = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}$

bisher: $n, m = 1, 2, 3, \ldots$; genauso für $n = -1, -2, \ldots$

kann jede reelle Zahl λ bel. genau durch $\frac{n}{m}$ approximieren

$\Rightarrow$ allgemein $\partial_x x^\lambda = \lambda x^{\lambda-1}$

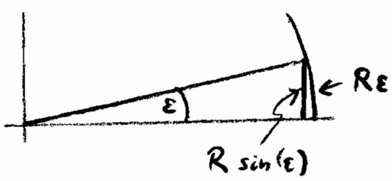
(E) $\partial_x \sin(x) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sin(x+\varepsilon) - \sin(x)\right)$

s. Kap. 1 Skript S. 7

$= \frac{1}{\varepsilon}\Big(\sin(x)\underbrace{\cos(\varepsilon)}_{\overset{(**)}{=}\,1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \cos(x)\underbrace{\sin(\varepsilon)}_{\overset{(*)}{=}\,\varepsilon+\mathcal{O}(\varepsilon^3)} - \sin(x)\Big)$

$= \cos(x)$

(*)



(**) $\cos(\varepsilon) = \sqrt{1-\sin^2(\varepsilon)}$

$\to \sqrt{1-\varepsilon^2+\ldots} = 1 - c\varepsilon^2 + \ldots$

quadr.: $1-\varepsilon^2+\ldots = 1-2c\varepsilon^2+\ldots$

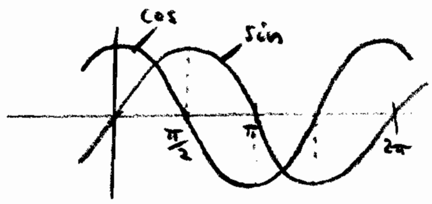
$\Rightarrow c = \frac{1}{2}$

(F) $\partial_x \cos(x) = \partial_x \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\partial_x \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin(x)$

(***) $\sin(x) = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\cos(x) = -\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$



(G) $\partial_x g\cdot h = g'h + h'g$ "Produktregel"

(H) $\partial_x f(g(x)) = f'(g)\cdot g'$ "Kettenregel"

(I) $\partial_x f(g,h) = f'^g g' + f'^h h'$

aus (I) folgen (H) und (G). (I)-Herleitung genügt:

$\partial_x f = \frac{1}{\varepsilon}\Big[f\big(\underbrace{g(x+\varepsilon)}_{=\,g(x)+\varepsilon g'(x)}, h(x+\varepsilon)\big) - f(g(x), h(x))\Big]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left[f(g+\varepsilon g', h+\varepsilon h') - f(g, h+\varepsilon h') + f(g, h+\varepsilon h') - f(g,h)\right]$

$= \frac{1}{\varepsilon}\left[\varepsilon g'\cdot f'^g(g, h+\varepsilon h') + \varepsilon h' f'^h(g,h)\right] = \text{(I)}$

Bsp (I) gilt natürlich entsprechend auch für 3 Funktionen.

schöne Anwendung: "Gradient"

Maikäfer fliegt mit $\vec{r}(t)$ durch Abendluft mit Temp. $T(\vec{r})$

Welche Temp.-Änderung pro Zeit hat er auszuhalten?

$$\partial_t T\big(x(t), y(t), z(t)\big) = \dot{x}\,\partial_x T + \dot{y}\,\partial_y T + \dot{z}\,\partial_z T \qquad (\partial_t z =: \dot{z})$$

sieht aus wie Skalarprod.

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{(\partial_x T, \partial_y T, \partial_z T)}_{= (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\, T \;=:\; \operatorname{grad} T \;=:\; \vec{\nabla} T}$$

$$= \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} T \quad , \quad \vec{\nabla} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

differenzieren einer Vektorfunktion?

simpel: $\quad \partial_t \vec{a}(t) := \frac{d\vec{a}}{dt} = (\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3)$

((wie bei $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$))

übrigens ist $\overrightarrow{\text{Beschleunigung}} := \partial_t \vec{v}(t) = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$

Gefahr: $\quad |\dot{\vec{r}}| = v \neq \dot{r} = \partial_t |\vec{r}|$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\dot{r} = \frac{1}{2\sqrt{\ldots}}(2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}) = \frac{1}{\sqrt{\ldots}}\,\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{v} = \vec{e}_r \cdot \vec{v} = v_{\parallel} \neq v$$

((z.B. Kreisbewegung von S. 11 : $|\dot{\vec{r}}| = R\omega$, $\dot{r} = 0$))

Rechenregeln (mit (I) leicht zu verstehen)

$$\partial_t \begin{cases} \vec{a} + \vec{b} \\ \lambda \vec{a} \\ \vec{a}\,\vec{b} \\ \vec{a} \times \vec{b} \end{cases} = \begin{cases} \dot{\vec{a}} + \dot{\vec{b}} \\ \dot{\lambda}\vec{a} + \lambda \dot{\vec{a}} \\ \dot{\vec{a}}\,\vec{b} + \vec{a}\,\dot{\vec{b}} \\ \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} \end{cases}$$

Linearer Operator

Op Element = anderes Element ; $\lambda \nearrow = \nearrow$; $\vec{a}\times \vec{} = \vec{}$; $\partial_x f = f'(x)$

A ist ein linearer Op. $\Leftrightarrow A(\alpha f + \beta g) = \alpha A f + \beta A g$

$Af := \frac{1}{f}$ ist nicht lin., denn $\frac{1}{\alpha f + \beta g} \neq \alpha \frac{1}{f} + \beta \frac{1}{g}$

$A^2 := AA \quad , \quad \partial_x^3 f = f''' \quad$, etc.