Vektoren $\vec a$. $(=\vec a)$

bisher: $|\vec a|$, $c\vec a$, $\vec a + \vec b$

heute: weitere Verknüpfungen von 2 Vektoren

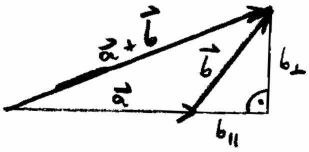
↪ $\vec a+\vec b$, $\underline{\vec a\cdot\vec b}$, $\underline{\vec a\times\vec b}$, $\vec a\circ\vec b$, "$a_\wedge b$"

Skalarprodukt $\vec a\cdot\vec b$

Motivation

(M1) $\vec a \perp \vec b$ ⇒ $|\vec a+\vec b|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

$\vec a, \vec b$ ⇒ $|\vec a+\vec b|^2-a^2-b^2 = 2\cdot \text{Rest} =: 2\cdot(\vec a\cdot\vec b)$ — definiert die rechte Seite der Gleichung

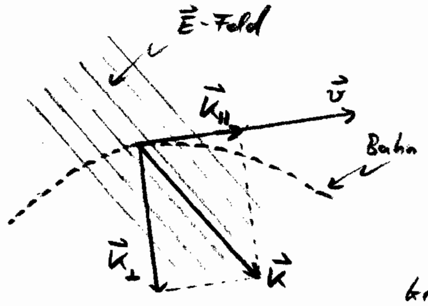


haben $\vec b$ zusammengesetzt

$\vec b = \vec b_\perp + \vec b_\parallel$ — parallel zu $\vec a$ "Projektion von $\vec b$ auf $\vec a$"

also: $\vec a\cdot\vec b = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_\parallel)^2+b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2\Big] = a b_\parallel$

(M2)



geladenes Teilchen (Ladung q) im elektrischen Feld $\vec E$.

$\vec K = q\vec E = \vec K_\perp + \vec K_\parallel$ — $\vec K_\perp$: krümmt Bahn; $\vec K_\parallel$: parallel zu $\vec v$; beschleunigt

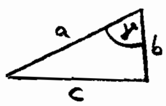
also macht auch hier eine Definition $K_\parallel =: \frac{\vec v}{v}\cdot\vec K$ Sinn.

Definition

$$\boxed{\vec a\cdot\vec b := a b_\parallel = a_\parallel b = ab\cos(\varphi)}$$

→ Gleichberechtigung: $\vec a\cdot\vec b = \vec b\cdot\vec a$ → Definiert $\cos(\varphi)$

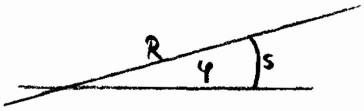
((NB



"Kosinussatz" $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

folgt aus Vektorrechnung: $c^2 = (\vec a-\vec b)^2 = a^2+b^2-2\vec a\cdot\vec b$))

Winkel ?



Maß der "Öffnung" zweier Geraden

offensichtlich ist R proportional zu s.

Definition $\boxed{\text{Winkel } \varphi := s/R}$ ((dimensionslos : Länge/Länge))

rechter Winkel? 90°? $\pi/2$!

nachmessen: 

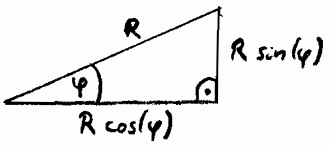
, $s/R = 3.14159\ldots =: \pi$

Raumwinkel?

Maß für "Öffnung" eines Kegels, mit Stück Kugelfläche S als Abschluß. $2 \cdot R \to 4 \cdot S$, also:

Def $\boxed{\text{Raumwinkel } \Omega := S/R^2}$ ((dimensionslos))

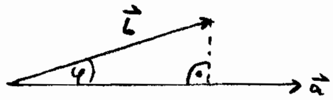
Sinus? Kosinus?



$$\cos(\varphi) := \frac{\text{Kantenlänge am Winkel } \varphi}{R}$$

$$\sin(\varphi) := \frac{\text{Kantenlänge gegenüber } \varphi}{R}$$

$\Rightarrow$ Pythagoras: $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$

verstehen jetzt auch das letzte Gleichheitszeichen der Skalarprodukt-Def: 

$b_{\parallel} = b\cos(\varphi)$

Formelsammlung zum Skalarprodukt

"genau dann, wenn"

$\vec{a}^2 := \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$, $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}$, $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

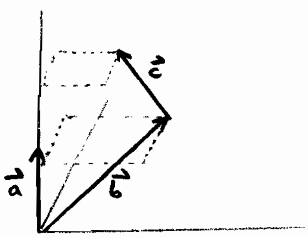
$|\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq ab$ (Schwarz'sche Ungleichung)

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

(*) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}$



alles anschaulich klar, z.B. Skizze $\rightarrow$

liefert $(\vec{b}+\vec{c})_{\parallel} = b_{\parallel} + c_{\parallel}$. Multipliziere mit a $\overset{\text{es folgt}}{\Rightarrow}$ (*)

Vereinbarung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b}$

brauche manchmal Klammern: $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$!

nie durch einen Vektor teilen. "$\cancel{/\vec{a}}$" nicht def.

in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl , Vektor = Vektor

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ in Komponenten

brauchen Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen:

$\vec{e}_1 = (1,0,0)$; $\vec{e}_2 = (0,1,0)$; $\vec{e}_3 = (0,0,1)$

dann ist $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

und
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)\\ &= a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_3b_1\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1\\ &\quad + a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_3b_2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2\\ &\quad + a_1b_3\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + a_2b_3\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + a_3b_3\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}$$

Einstein'sche Summenkonvention

(der Gipfel der Faulheit ... aber sehr effizient!)

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \overset{!}{=:} a_j b_j$$

falls zwei gleiche Indizes vorkommen → summieren

obige Herleitung nun kurz: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_j\vec{e}_j\cdot b_k\vec{e}_k = a_jb_k\delta_{jk} = a_jb_j$

mit Kronecker-Symbol $\delta_{jk} := \vec{e}_j\cdot\vec{e}_k = \begin{cases}1 & \text{für } j=k\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$

Anwendungs-Beispiele:

$a_ja_j = a^2$

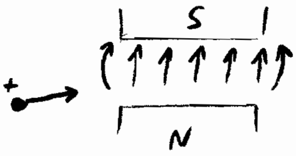
$c_ka_ja_\ell b_k\delta_{j\ell} = a^2(\vec{c}\cdot\vec{b})$

$\delta_{j\ell}\delta_{\ell k} = \delta_{jk}$, $\delta_{j\ell}\delta_{\ell m}\delta_{mn}\delta_{nk} = \delta_{jk}$

$\delta_{jj} = 3$, $\delta_{j\ell}\delta_{\ell j}\delta_{mn}\delta_{nm} = 9$

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$

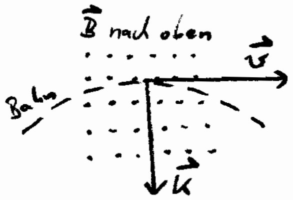
Motivation



el. geladenes Teilchen (Ladung q)
fliegt durch Magnetfeld $\vec{B}$

Experiment $\Rightarrow$ $\vec{K} \perp \vec{v}$, $\vec{K} \perp \vec{B}$

und $\vec{K}$ proportional q und $v B_\perp = v_\perp B$ — Komp. senkrecht zu $\vec{v}$



$\Rightarrow$ erfinde "Kreuzprodukt"
mit den genannten Eigenschaften

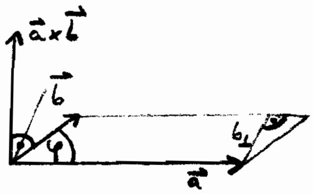
$$\vec{K} =: q\,(\vec{v} \times \vec{B})$$

(Anwendung? DESY, CERN, .. !)

Definition

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix}\text{Fläche des von}\\ \vec{a}, \vec{b} \text{ aufgespannten}\\ \text{Parallelogramms}\end{pmatrix} \cdot \vec{e} = -\vec{b} \times \vec{a} = \vec{e}\, a b \sin(\varphi)}$$

wobei $\vec{e}$ Einheitsvektor $\perp \vec{a}$ und $\perp \vec{b}$
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$ bilden ein Rechtssystem



Formelsammlung zum Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}_\perp = \vec{a}_\perp \times \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0 \quad , \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = a b_\perp = a_\perp b$$

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

$$a \perp \vec{b} \Leftrightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = ab$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

alles anschaulich klar;

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})}$$

(Beweis s. Ü 6d)

(kommt sehr häufig vor)

Zerlegung $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$ oft nützlich

muß angeben, in Bezug auf welchen Vektor $\parallel$ und $\perp$ gilt:

z.B. in Bezug auf Einheitsvektor $\vec{e}$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_\parallel = (\vec{a}\vec{e})\vec{e}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a}(\vec{e}\vec{e}) - \vec{e}(\vec{a}\vec{e}) \overset{\text{BAC-CAB}}{=} \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})$$

$\vec{a}\times\vec{b}$ in Komponenten

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2 = \vec{e}_3 \quad , \quad \vec{e}_2\times\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad , \quad \vec{e}_3\times\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad ; \quad \vec{e}_1\times\vec{e}_1 = 0 \text{ etc.}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{a}\times\vec{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{a}\times\vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \, , \, a_3 b_1 - a_1 b_3 \, , \, a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

[Indizes: j-te Komponente ergibt sich durch $\cdot\vec{e}_j$ auf beiden Seiten

(wieder für ganz faule, oder effiziente Rechner)

$$(\vec{a}\times\vec{b})_j = a_k b_\ell \; \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_\ell) =: \varepsilon_{jk\ell}\, a_k b_\ell$$

mit $\varepsilon_{jk\ell} := \vec{e}_j\cdot(\vec{e}_k\times\vec{e}_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{wenn 2 Indizes gleich sind} \\ 1 & \text{wenn } j,k,\ell \text{ zyklisch} \\ -1 & \text{wenn } j,k,\ell \text{ antizyklisch} \end{cases}$

"total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe"

((zyklisch: 1,2,3 ; 2,3,1 ; 3,1,2

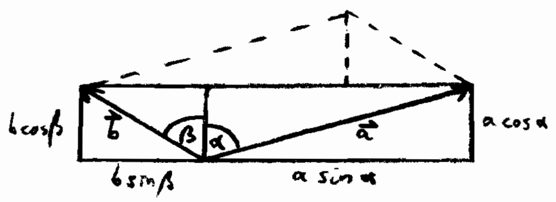
anti ": 1,3,2 ; 2,1,3 ; 3,2,1))]

Trigonometrie?

Sinussatz, Kosinussatz etc

sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung. (s. S.3)

weiteres Bsp.



Fläche großes Rechteck $\overset{\text{Fläche Parallelogramm}}{=} |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(\alpha+\beta)$

$\%$

$= $ linkes + rechtes Rechteck

$= b\sin(\beta)\; a\cos(\alpha)$

$+ a\sin(\alpha)\; b\cos(\beta)$

(teile durch $a\cdot b$) $\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$.