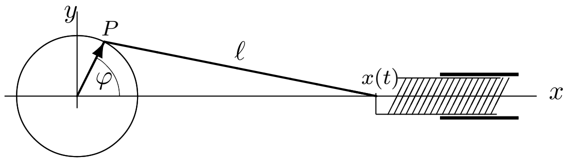
Klausur zu EMTP I   Uni Bielefeld   31.03.2008

[Beginn 09:30, Abgabe 11:30 ; 30 Punkte, bei ≥ 10 garantiert bestanden ; Name+Matrikelnr auf jedes Blatt]

Aufgabe 1: Kinematik (2 Punkte)
Ein Teilchen der Masse m bewege sich gemäß $\vec{r}(t) = R\left(c/\sqrt{2}\,,\, c/2 + s/\sqrt{2}\,,\, c/2 - s/\sqrt{2}\right)$, mit $c \equiv \cos(\omega t)$ und $s \equiv \sin(\omega t)$. Geben Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und den Drehimpuls $\vec{L}$ an.

Aufgabe 2: Ableitungen (1+1=2 Punkte)
(a) $\partial_x\, x^x = ?$ (b) $\partial_x \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = ?$

Aufgabe 3: Dampfmaschine (1+0.5+1.5=3 Punkte)
Ein Schwungrad (R) dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit: $\varphi = \omega t$. Eine Stange der Länge ℓ ($\ell > 2R$), die beweglich am Randpunkt $\vec{r}_P = R(c, s)$ befestigt ist, schiebt das Ende eines Kolbens auf der x–Achse hin und her. [$s = \sin(\varphi)$, $c = \cos(\varphi)$]



(a) $x(t) = ?$ (b) Welche Geschwindigkeit $\vec{v}_P(t) = \dot{\vec{r}}_P$ hat der Randpunkt?
(c) Stimmt es, daß bei $t = \frac{\pi}{2\omega}$ die P–Geschwindigkeit gleich der Kolbengeschwindigkeit $\dot{x}$ ist?

Aufgabe 4: Reihen (1+2=3 Punkte)
(a) Geben Sie den siebzehnten Term der Potenzreihe (um $x = 0$) von $1/(a - x)$ an.
(b) Berechnen Sie per Taylorreihe: $f(x) = e^{-x^2} = 1 + ... + \mathcal{O}(x^5)$.

Aufgabe 5: Differentialgleichung (3+1=4 Punkte)
$\boxed{\dot{v} = -\alpha v + k_0 e^{\beta t}\ ,\ v(0) = 0}$
(a) Welcher Ansatz [anderer Lösungsweg auch OK] für $v(t)$ könnte dieses Problem lösen? $v(t) = ?$
(b) Wie verhält sich $v(t)$ beim Start? [Geben Sie also den führenden v–Term bei $t \to 0$ an.]

Aufgabe 6: Potential (2 Punkte)
Für welche Werte α, β hat die Kraft $\vec{K} = (\alpha y, -x + z^2, \beta y z)$ ein Potential? Welches?

Aufgabe 7: kleine Schwingungen (3 Punkte)
Ein Teilchen (m) schwingt eindimensional im Potential $V(x) = \kappa a^2 f\left(\frac{x}{a}\right)$ mit $f(s) = \frac{\cosh(s)-1}{\ln(\cosh(s))}$.
Mit welcher Kreisfrequenz ω führt es kleine Schwingungen um den Ursprung aus?

Aufgabe 8: e hoch Matrix = Matrix (3 Punkte)
Berechnen Sie die 2×2-Matrix e^{tH}, wobei $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. [Hinweis: $H^2 = ?$]

Aufgabe 9: Eigenwerte und -vektoren einer Matrix (4 Punkte)
Berechnen Sie die Eigenwerte und die orthonormierten Eigenvektoren von $H = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.
Gehen Sie dabei die Punkte I–V des HT-Rezeptes durch. [Hinweis: Entartung; EV's orthogonal wählbar]

Aufgabe 10: Störungsrechnung (2+2=4 Punkte)
Der Faktor α in $\boxed{\dot{v} = g/(1 + \alpha v)\ ,\ v(0) = 0}$ sei sehr klein. Behandeln Sie das Problem
(a) in Störungsrechnung erster Ordnung, bestimmen also $v^{(0)}(t)$ und $v^{(1)}(t)$.
(b) exakt. Reproduziert die Entwicklung Ihrer exakten Lösung das (a)–Resultat?
[Hinweis zu (b): Nenner nach links bringen, Dgl als $\partial_t(\text{etwas}) = \partial_t(\text{etwas})$ schreiben, ..]

Viel Erfolg!