

# **Master-Arbeit**

## **WiSe 2017/2018**

**3d-effektive Theorie im Strong-Coupling Limit für  
Kogut-Susskind-Fermionen**

Manuel Göz  
Universität Bielefeld

Erstkorrektor: Dr. Wolfgang Unger  
Zweitkorrektor: Dr. Christian Schmidt

9. November 2018

E-Mail: [manuel-goez@live.de](mailto:manuel-goez@live.de)



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>1. Eichtheorien und Gitter-Eichtheorien</b>	<b>7</b>
1.1. Die Dirac-Lagrange-Dichte in der QCD . . . . .	7
1.2. Gitter-Feldtheorie und Gitter-Diskretisierung . . . . .	8
1.2.1. Die Fermion-Wirkung . . . . .	9
1.2.2. Das Fermion-Doppler-Problem . . . . .	10
1.2.3. Kogut-Susskind-Fermionen . . . . .	11
<b>2. Die Herleitung der 3d-effektiven Theorie</b>	<b>14</b>
2.1. Die 3d-effektive Theorie - Eine kurze Einführung . . . . .	14
2.2. Die Hopping-Parameter-Entwicklung . . . . .	15
2.3. Die 3d-effektive Theorie im Strong Coupling Limit $\beta \rightarrow 0$ . . . . .	16
2.3.1. Die statische Quark-Determinante . . . . .	17
2.4. Der statische Quark-Propagator . . . . .	27
2.5. Die räumliche Hopping-Parameter-Entwicklung . . . . .	29
2.6. Die Zustandsfunktion $\mathcal{Z}_2^{\text{Stagg.}}$ in erster Ordnung Hopping-Parameter-Entwicklung . . . . .	32
<b>3. Auswertung</b>	<b>36</b>
3.1. Vergleich der Single-Hop-Zustandssumme $\mathcal{Z}_2$ mit der dualen Darstellung	36
3.2. Die Single-Hop-Zustandssumme $\mathcal{Z}_2$ für $N_f = 1$ -Flavor Wilson-Fermionen	42
3.3. Observablen . . . . .	45
3.3.1. Das chirale Kondensat . . . . .	45
3.3.2. Der Polyakov-Loop-Erwartungswert . . . . .	48
<b>4. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>53</b>
<b>A. Appendix</b>	<b>55</b>
A.1. Der Kogut-Susskind-Formalismus . . . . .	55
A.1.1. Die Kogut-Susskind-Phasen $\eta_\mu(x)$ . . . . .	55
A.2. Analytische Hilfsmittel für die $SU(N)$ -Algebra . . . . .	56
A.2.1. Berechnung des Haar-Maßes . . . . .	56
A.2.2. $\chi_r \chi_s$ -Charakter-Integrale . . . . .	58
A.2.3. Integrale über Charaktere der $SU(3)$ . . . . .	59
A.2.4. Die $g^n(g^{-1})^m$ -Gruppen-Integrale . . . . .	60
A.2.5. Die statische Quark-Determinante . . . . .	61
A.2.6. Der symmetrische $A$ -Term aus Gl.(2.27) in Abhängigkeit von $\kappa_\tau$ .	62
A.2.7. Die Knoten-Funktion $W_{nm}$ . . . . .	64
<b>Literatur</b>	<b>67</b>
<b>A. Eigenständigkeitserklärung</b>	<b>70</b>



# Einleitung

Die **Quantenchromodynamik** (QCD) beschreibt die fundamentale Wechselwirkung der starken Wechselwirkung, welche die Quarks und Gluonen in Baryonen und Mesonen zusammenschließt. Die daraus resultierende Bindungsenergie entspricht hierbei 99 % der Hadronen-Masse, sodass die Stärke der starken Wechselwirkung der Ursprung des Großteils der sichtbaren Materie im Universum ist. Die QCD stellt eine **nicht-abelsche Quantenfeldtheorie** dar, basierend auf der Eichgruppe  $SU(3)_c$ , die auch als *Farbgruppe* bezeichnet wird.

Eine zentrale Eigenschaft der QCD ist die **asymptotische Freiheit**, das heißt, dass die Stärke der Wechselwirkung - ausgedrückt durch den Kopplungsparameter  $\alpha_s(Q^2)$  - mit steigender Energieskala  $Q$  abnimmt und im Limes  $Q \rightarrow \infty$  gegen Null konvergiert (siehe [Gross, Wilczek; 1973]). Derartig hohe Energien können bei Schwerionenkollisionen in Teilchenbeschleunigern beobachtet werden.

Eine weitere Eigenschaft der QCD ist der **Quark-Einschluss**, auch **Confinement** genannt. Dieser geht bei hinreichend hohen Temperaturen verloren. In diesem **Deconfinement-Übergang** bilden die charakteristischen Freiheitsgrade nicht mehr gebundene, hadronische Zustände, sondern gehen in einen Zustand quasi-freier Quarks und Gluonen, dem sogenannten *Quark-Gluon-Plasma* (QGP), über. Es ist bekannt, dass dieser Übergang in den anfänglichen Phasen des Universums vorzufinden war. Confinement tritt zwischen Quarks und Gluonen ein, wenn der Kopplungsparameter  $\alpha_s$  bei größeren Abständen bzw. niedrigeren Energieskalen  $Q$  zunimmt und damit sehr starke Wechselwirkungen zwischen farbgeladenen Teilchen vorliegen. In diesem Bereich können folglich keine störungstheoretischen Ansätze verwendet werden. Um die QCD näher erforschen zu können, werden somit nicht-störungstheoretische Ansätze benötigt.

Ein solcher Ansatz, der zur Modellierung der QCD verwendet wird, stellt die **Gitter-QCD** dar. In der Gitter-QCD wird das Raum-Zeit-Kontinuum durch ein diskretes Gitter als Regulator ersetzt. Dabei wird das Maß der Zustandssumme als Wahrscheinlichkeitsmaß interpretiert, allerdings ist dieses Maß bei endlichem chemischen Potential nicht mehr positiv und man spricht vom sogenannten **Vorzeichenproblem**. Das Vorzeichenproblem stellt ein rein numerisches Problem dar und wird in dieser Ausarbeitung keine bedeutende Rolle spielen, da hauptsächlich analytische Berechnungen durchgeführt werden.

In dieser Master-Arbeit wird die Zustandssumme für  $N_f = 1$ -Flavor Kogut-Susskind-Fermionen ermittelt. Um eine analytische Berechnung der Zustandssumme vornehmen zu können, wird eine **effektive Gittertheorie** verwendet, in der das auftretende Integral der Zustandssumme  $Z$  über einen Teil der Freiheitsgrade analytisch ausgewertet wird (siehe [Philipsen et al.; 2015]). Dabei werden die räumlichen Freiheitsgrade ausintegriert. Die resultierenden Freiheitsgrade sind die sogenannten **Polyakov-Loops**, welche geschlossene Quark-Linien in Zeitrichtung darstellen. Die effektive Wirkung setzt sich folglich aus Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen, Übernächste-Nachbar-Wechselwirkungen, etc. dieser Variablen zusammen.

Zudem wird der Integrand der Zustandssumme in bestimmten Grenzwerten entwickelt.

Ein geeigneter Entwicklungspunkt ist die Theorie der stark gekoppelten Quarks, in der die Integrale der Zustandssumme analytisch lösbar werden. Der zugehörige Grenzwert wird als **Strong Coupling Limit** bezeichnet und entspricht dem Grenzwert  $\alpha_s \rightarrow \infty$ , was in der Gitter-QCD dem Verschwinden des Parameters  $\beta \propto \frac{1}{\alpha_s} \rightarrow 0$  entspricht.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit besteht also darin, eine effektive Theorie für  $N_f = 1$  Flavour mit der Diskretisierungsmethode der sogenannten **Kogut-Susskind**-bzw. **Staggered-Fermionen** im Strong Coupling Limit herzuleiten. Unter Vernachlässigung gluonischer Anteile werden in dieser Master-Arbeit **schwere** statische Quarks, sowie dynamische Quarks untersucht. Man spricht daher vom **Heavy-Quark-Mass-Bereich**. Die im Integranden der Zustandssumme auftretende *Fermion-Determinante* kann damit sowohl für Wilson-, als auch für Kogut-Susskind-Fermionen, in einen statischen und kinetischen Anteil faktorisiert werden, um physikalische Parameter über die statische Quark-Determinante  $\det(Q_{\text{stat.}})$  entwickeln zu können. Ignoriert man die kinetischen Anteile in der Zustandssumme, so werden ausschließlich statische Baryonen und Mesonen untersucht und man spricht vom **Static Limit**.

Verwendet man nun Gitter-QCD mit Kogut-Susskind-Fermionen, so taucht die Masse im sogenannten *Hopping-Parameter*  $\kappa_{s,t}$  auf. Die Indizes  $s$  und  $t$  bezeichnen hierbei die räumlichen und zeitlichen *Hops* der dynamischen und statischen Quarks. Der Limes unendlich schwerer Quarks stellt hiermit eine Entwicklung um die Punkte  $\kappa_{s,t} \rightarrow 0$  dar, die auch als **Hopping-Parameter-Entwicklung** bekannt ist. Diese Entwicklungsmethode wird zentraler Ausgangspunkt für die Berechnung der relevanten **Single-Hop-Zustandsfunktion**  $Z_2^{\text{stagg.}}$  sein, die in der niedrigsten Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$  betrachtet wird (siehe Kapitel 2).

Im dritten Kapitel dieser Ausarbeitung wird das Resultat für die Zustandsfunktion, welches mithilfe der 3d-effektiven Theorie hergeleitet wurde, mit der korrespondierenden Zustandssumme in der **dualen Darstellung** und auch mit dem Ergebnis für *Wilson-Fermionen* verglichen. Die duale Darstellung stellt ebenfalls einen Ausweg dar, das Vorzeichen-Problem im Strong Coupling Limit bei endlichem chemischen Potential zu beheben und kann auf [Karsch, Mütter; 1989] zurückgeführt werden. Der von ihnen verfolgte Ansatz basierte darauf, die Zustandssumme explizit in ein *Dimer-Modell* zu überführen (siehe [Rossi, Wolff; 1984]), indem man zunächst über die Link-Variablen integriert und anschließend die Grassmann-Integration ausführt.

Mit der vorliegenden Single-Hop-Zustandsfunktion  $Z_2^{\text{stagg.}}$  können schließlich für die Untersuchung von Phasenübergängen relevante Observablen - der **Polyakov-Loop-Erwartungswert**  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  und das **chirale Kondensat**  $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$  - ausgewertet werden.

# 1. Eichtheorien und Gitter-Eichtheorien

In diesem Kapitel wird die Quantenfeldtheorie eingeführt, die die Invarianz der Fermionen unter lokalen Gruppentransformationen beschreibt, sowie die Dirac-Lagrange-Funktion in Abschnitt 1.1. Nach einer kurzen Einführung in die Kontinuumsphysik erfolgt in Kapitel 1.2 eine Raum-Zeit-Diskretisierung, um die physikalische Theorie für Fermionen in ein Gitter zu überführen.

Für diesen inhaltlichen Teil sind Literaturquellen verwendet worden, die sich mit den Themengebieten der Quantenfeldtheorie (z.B. [Peskin, Schröder; 1995]) und der Gittereichtheorie (z.B. [Montvay, Münster; 1997], [Gattringer, Lang; 2008]) befassen.

## 1.1. Die Dirac-Lagrange-Dichte in der QCD

Der zentrale Ausgangspunkt der meisten Quantenfeldtheorien, insbesondere der **Quantenchromodynamik** (kurz: QCD), ist die *Diracsche Lagrange-Dichte*:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}_{c_1,f} (\gamma_\mu D_\mu^{c_1 c_2} + m_f) \Psi_{c_2,f} + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (1.1)$$

Die Farbindizes der fundamentalen Darstellung  $c_1, c_2$  nehmen die Werte 1 bis 3, die der adjungierten Darstellung nehmen die Werte  $a = 1, \dots, 8$  an. Die Raum-Zeit-Indizes  $\mu, \nu$  durchlaufen die Werte 0, 1, 2, 3, wobei der Wert 0 für die Zeitrichtung steht. Die Flavor-Indizes besitzen die Werte  $f = 1, \dots, 6$ .

In der oben genannten Lagrange-Dichte treten die Fermion-Felder  $\Psi, \bar{\Psi}$  auf, die *Grassmann-Zahlen* darstellen. Die Grassmann-Zahlen  $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$  erfüllen die sogenannte *Grassmann-Algebra*, welche durch die Antikommutator-Relationen

$$\{\bar{\xi}_1, \xi_2\} = 0 \quad \text{und} \quad \{\xi_1, \xi_2\} = \{\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2\} = 0, \quad (1.2)$$

sowie durch die *Grassmann-Integration* definiert wird (siehe [Gattringer, Lang; 2008]).

Die *Yang-Mills-Theorie*, die man aus der QCD konstruieren kann, indem man die Quarkmassen unendlich groß wählt (siehe [Peskin, Schröder; 1995]), beschreibt gluonische Wechselwirkungen und lautet:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (1.3)$$

Die in dieser Lagrange-Dichte auftretenden Feldstärke-Tensoren, sowie die kovarianten Ableitungen in Gl.(1.1) hängen dabei zusätzlich von den Eichfeldern  $A_\mu$  ab,

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.4)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu^a T^a. \quad (1.5)$$

Die Matrizen  $T^a$  sind die Generatoren der Eichgruppe und erfüllen die folgenden Identitäten

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c, \quad (1.6)$$

$$\text{tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}, \quad (1.7)$$

wobei die Parameter  $f^{abc}$  die reellen, antisymmetrischen *Strukturkonstanten* der Eichgruppe darstellen. Der Faktor  $g$  ist die Kopplungskonstante der **starken Wechselwirkung**.

In dieser Ausarbeitung wird das **Strong Coupling Limit** betrachtet, das heißt, dass im Grenzfall unendlicher Kopplung  $\beta = \frac{2N}{g^2} \rightarrow 0$  für  $g \rightarrow \infty$  der Yang-Mills-Term vernachlässigt wird, um den Rechenaufwand in der analytischen Berechnung der Zustandssumme zu reduzieren.

Die **Zustandssumme**  $Z$  stellt in der Quantenfeldtheorie eine wichtige Größe dar. In der QCD wird die Zustandssumme folgendermaßen definiert,

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A e^{-S[A, \bar{\Psi}, \Psi]}, \quad (1.8)$$

mit den Integrationsmaßen  $\mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} = \prod_{x,f,c_1} d\Psi_{c_1,f}(x) \prod_{x,f,c_2} d\bar{\Psi}_{c_2,f}(x)$ ,  $\mathcal{D}A = \prod_{x,\mu} dA_\mu(x)$  (siehe [Gattringer, Lang; 2008]). Die Wirkung  $S$  kann über die Lagrange-Dichte ausgedrückt werden

$$S[A, \bar{\Psi}, \Psi] = \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi], \quad (1.9)$$

dadurch wird die QCD eindeutig durch  $\mathcal{L}$  und den Eigenschaften der Felder  $A_\mu, \bar{\Psi}, \Psi$  festgelegt. Von großer physikalischer Bedeutung sind Erwartungswerte hermitescher Operatoren  $\mathcal{O}$ , die im Pfadintegral-Formalismus über die Zustandssumme ermittelt werden können:

$$\langle \mathcal{O}[A, \bar{\Psi}, \Psi] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}A e^{-S[A, \bar{\Psi}, \Psi]} \mathcal{O}. \quad (1.10)$$

Die Menge dieser hermiteschen Operatoren repräsentiert physikalische *Observablen*.

In Kapitel 3 dieser Ausarbeitung erfolgt die Berechnung des **Polyakov-Loop-Erwartungswertes**  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$ , der solch eine Observable darstellt.

## 1.2. Gitter-Feldtheorie und Gitter-Diskretisierung

Mit einer vorgegebenen Lagrange-Dichte  $\mathcal{L}$  bzw. ihrer zugehörigen Wirkung  $S$  besteht nun die Möglichkeit, das Integral der Zustandssumme in Gl. (1.8) auszuwerten. Dieses Integral ist allerdings unendlich-dimensional und damit im Allgemeinen nicht wohldefiniert. Es wird ein **Regulator** benötigt, der die Zustandssumme in eine analytisch lösbare Form überführt.

Im sogenannten **Gitter-Ansatz**, der bereits 1974 von Wilson eingeführt wurde, wird die kontinuierliche Raum-Zeit durch ein Gitter mit endlichem Gitterabstand  $a$  ersetzt, wodurch die Existenz von Feldern und Variablen auf *Gitter-Punkten* eingeschränkt wird. Die *totale Anzahl der Gitterpunkte* ist eine dimensionslose Größe und durch

$$\Omega = N_s^d N_\tau \stackrel{d=3}{=} N_s^3 N_\tau \quad (1.11)$$

gegeben, wobei die jeweiligen Anzahlen der Gitterpunkte in Raum- und Zeitrichtung mit  $N_s$  und  $N_\tau$  bezeichnet werden. Die zu betrachtende physikalische Theorie - in diesem

Fall die QCD - wird auf einem  $(3 + 1)$ -dimensionalen, hyperkubischen Gitter mit kleinstmöglichem Gitterabstand  $a \rightarrow 0$  betrachtet.  $N_\tau$  nimmt auf dem Gitter endliche Werte an, die räumlichen Gitterlängen  $L \equiv N_s a$  werden mit  $N_s \rightarrow \infty$  konstant gehalten. Die Relation  $N_s \gg N_\tau$  beschreibt den **thermodynamischen Limes** (siehe [Montvay, Münster; 1997]). Die so entstehende Theorie wird als **Gitter-QCD** bezeichnet. Mit der Einführung einer diskretisierten Raum-Zeit müssen auch entsprechende diskrete Ableitungsoperatoren - ausgedrückt durch endliche Differenzen -, sowie diskrete Eich- und Fermion-Felder definiert werden, um im **Kontinuumsimes**  $a \rightarrow 0$  die ursprüngliche Theorie wiederherstellen zu können.

Das Raum-Zeit-Gitter birgt zusätzlich ein Regularisierungsschema, das bedeutet, dass für nicht-verschwindende Gitterabstände  $a$  alle Impulse einen Ultraviolett-Cut-Off  $\Lambda = \frac{\pi}{a}$  aufweisen. Dieses Schema ist nicht an die Störungstheorie gebunden, damit ist das Gitter ein *nicht-störungstheoretischer* Regulator (siehe [Gattringer, Lang; 2008]).

Durch die Einführung des Gitters wird die Anzahl der zu ermittelnden Integrale der Zustandssumme zwar noch äußerst groß, aber endlich, was insbesondere für Monte-Carlo-Simulationen vorteilhaft sein kann.

### 1.2.1. Die Fermion-Wirkung

Fermionen erschweren Computer-Simulationen in der Gitter-Theorie, da diese aufgrund ihrer vielen Freiheitsgrade die Rechenzeit erhöhen. Im Kontinuum lautet die freie Fermion-Wirkung im Euklidischen Raum:

$$S = \int d^4x [\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x) + m\bar{\psi}(x)\psi(x)]. \quad (1.12)$$

Um eine diskrete Variante dieser Wirkung zu erhalten, setzt man die Grassmann-Variablen auf den Gitter-Punkten  $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  fest und ersetzt die Ableitungsoperatoren durch endliche Differenzen,

$$S_{f,lat.} = \sum_{x,\mu} \bar{\psi}_x \gamma_\mu \Delta_\mu \psi_x + m \sum_x \bar{\psi}_x \psi_x, \quad (1.13)$$

wobei die Gitter-Variante der partiellen Ableitung definiert ist durch:

$$\Delta_\mu \psi_x \equiv \frac{1}{2a} (\psi_{x+\hat{\mu}} - \psi_{x-\hat{\mu}}). \quad (1.14)$$

Damit lautet die Fermion-Gitter-Wirkung (siehe [Gattringer, Lang; 2008])

$$S_f = a^4 \sum_x \left( m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 0}^{\pm 3} \bar{\psi}(x + \hat{\mu})\gamma^\mu U_\mu(x)\psi(x) \right), \quad (1.15)$$

wobei die Summe über diskrete Punkte auf dem Gitter erfolgt und die Kurznotation  $\gamma^{-\mu} \equiv -\gamma^\mu$  verwendet wird. Üblicherweise faktorisiert man die Felder in Gl.(1.15) heraus und stellt die Wirkung als Vektor-Matrix-Produkt dar,

$$S_f = a^4 \bar{\psi}_y Q_{yx} \psi_x, \quad Q_{yx} [U_\mu] = m\delta_{y,x} - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 0}^{\pm 3} \gamma^\mu U_\mu(x) \delta_{y-\mu,x}, \quad (1.16)$$

wobei Spin- und Eichfeld-Indizes hier zunächst nicht aufgeführt werden. Damit kann das Integral über alle Fermion-Felder zu dem folgenden exakten Ausdruck vereinfacht werden:

$$\int \prod_{i,j} d\bar{\psi}_i d\psi_j e^{\bar{\psi}_i Q_{ij} \psi_j} = \det(Q). \quad (1.17)$$

Die Matrix  $Q$  bezeichnet hierbei den *Dirac-Operator* oder die *Fermion-Matrix* und  $\det(Q)$  ist die zugehörige **Fermion-Determinante**.

Im späteren Verlauf dieser Ausarbeitung wird die Fermion-Determinante für Kogut-Susskind-Fermionen in einen statischen und kinetischen Anteil faktorisiert, d.h.  $\det(Q) = \det(Q_{\text{stat.}}) \cdot \det(Q_{\text{kin.}})$ , um Fermion-Fermion-, sowie Fermion-Antifermion-Wechselwirkungen näher untersuchen zu können.

### 1.2.2. Das Fermion-Doppler-Problem

Die im vorigen Abschnitt eingeführte Wirkung stellt eine naive Formulierung der Gitter-Fermionen dar und birgt das sogenannte **Doppler-Problem**. Dies erkennt man durch nähere Betrachtung des *Fermion-Propagators* (siehe [Kogut, Susskind; 1975]):

$$\frac{1}{a} S_p = \frac{-i\gamma_\mu \sin(p_\mu a) + ma}{\sum_\mu \sin^2(p_\mu a) + m^2 a^2}. \quad (1.18)$$

Diese Größe besitzt 16 Pole in der Brillouin-Zone statt eines einzigen Pols im Ursprung, dabei weist nur diese Polstelle einen physikalischen Bezug auf. Die zusätzlichen 15 unphysikalischen Doppler entstehen durch die Gitter-Regularisierung.

Das **Nielsen-Ninomiya-Theorem** (siehe [Nielsen, Ninomiya; 1981]) besagt, dass die Existenz einer Fermion-Gitter-Wirkung, die eine Invarianz gegenüber Translationen und chiralen Transformationen besitzt, doppler-frei, lokal und bilinear zugleich ist, unmöglich ist. Um die Doppler in der Wirkung beseitigen zu können, muss also eine der zuvor genannten Eigenschaften vernachlässigt werden.

Im darauffolgenden Abschnitt wird eine Diskretisierungsmethode für Fermionen zur Umgehung des Doppler-Problems vorgestellt, die sogenannten **Kogut-Susskind-Fermionen**. Dieser Fermion-Typ reduziert die Anzahl der Doppler von 16 auf 4 (siehe [Kluberg-Stern et al.; 1983]).

Zur Vervollständigung seien an dieser Stelle weitere Diskretisierungsmethoden für Fermionen erwähnt: Die **Wilson-Fermionen** stellen ebenfalls eine Möglichkeit dar, das Doppler-Problem durch Einführung eines *Wilson-Terms* zu beseitigen. In Kapitel 3 dieser Ausarbeitung wird die Zustandssumme der 3d-effektiven Theorie für Kogut-Susskind-Fermionen im Strong Coupling Limit - im späteren Verlauf als **Single-Hop-Zustandssumme**  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  bezeichnet - dem entsprechenden Resultat für Wilson-Fermionen gegenüber gestellt (siehe [Philipsen et al.; 2015]).

*Domain-Wall-* (siehe [Kaplan; 1992]) und *Overlap-Fermionen* (siehe [Neuberger; 1998]) weisen gute chirale Eigenschaften auf, wodurch zusätzliche Massen-Renormalisierung verhindert wird. Die sog. *Creutz-Fermionen* (siehe [Creutz; 2008]) besitzen sogar eine minimale Anzahl von Dopplern und werden deshalb auch *Minimal-Doppler-Fermionen* genannt.

Von den genannten Diskretisierungsmethoden werden hauptsächlich **Wilson-** und **Kogut-Susskind-Fermionen** für numerische Simulationen verwendet.

### 1.2.3. Kogut-Susskind-Fermionen

Wie bereits erwähnt, führt die naive Diskretisierung der QCD zum Fermion-Doppler-Problem. Obwohl der Ursprung dieses Problems auf die symmetrische Form der Gitter-Ableitung zurück geführt werden kann, garantiert die Wahl dieser Ableitung die Hermitizität der Wirkung. Allerdings müssen diese Doppler aus der Wirkung beseitigt werden, um die korrekte Physik im Kontinuum beschreiben zu können. Eine Möglichkeit, die Anzahl der Fermion-Doppler zu reduzieren, sind die sog. **Kogut-Susskind-Fermionen** (siehe [Kogut, Susskind; 1975]). Dazu betrachte man sich erneut die kontinuierliche Euklidische Dirac-Wirkung für ein Fermion und ihre korrespondierende naive Diskretisierung (entsprechend Gl.(1.15)):

$$S_F^{(\text{cont.})} = \int d^4x \bar{\psi}(x) (\gamma_\mu \partial_\mu + m) \psi(x)$$

$$S_F^{(\text{latt.})} = a^4 \sum_x \left\{ \sum_{\mu=0}^3 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\psi(x + \hat{\mu}) - \psi(x - \hat{\mu})}{2a} + m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right\}. \quad (1.19)$$

Die kontinuierliche Wirkung  $S_F^{\text{cont.}}$  enthält Gitter-Artefakte. Durch einen Variablentausch der naiven Fermion-Wirkung in Gl.(1.19) kann die Anzahl der Freiheitsgrade je Gitterpunkt von 4 auf 1 reduziert werden (die Farb-Freiheitsgrade werden hier vernachlässigt). Mithilfe einer geeigneten Linearkombination der sechzehn Freiheitsgrade auf den jeweiligen Vertices jedes Gitter-Einheits-Hyperwürfels erhält man somit vier Fermion-Felder. Diese existieren nun auf einem Gitter mit doppelter Gitterbreite und es können zusätzliche physikalische Beiträge zum Fermion-Propagator nachgewiesen werden. Quantitativ ausgedrückt bedeutet dies: Falls  $T(x)$  eine unitäre  $4 \times 4$ -Matrix ist, sodass

$$T^\dagger(x) \gamma_\mu T(x \pm \hat{\mu}) = \eta_\mu(n) \mathbf{1} \quad (1.20)$$

gilt, dann überführt die Transformation

$$\hat{\psi}(x) = T(x) \chi(x), \quad \bar{\hat{\psi}}(x) = \bar{\chi}(x) T^\dagger(x) \quad (1.21)$$

die Wirkung in Gl.(1.19) in

$$S_F^{(\text{latt.})} = a^4 \sum_x \left\{ \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\hat{\mu}}(x) \left( \sum_{j=0}^3 \hat{\chi}(x) \frac{\hat{\chi}_j(x + \hat{\mu}) - \hat{\chi}_j(x - \hat{\mu})}{2a} \right) + m \sum_j \hat{\chi}_j(x) \hat{\chi}_j(x) \right\}.$$

Diese Wirkung ist im Dirac-Raum diagonal und beschreibt 4 unabhängige Felder  $\hat{\chi}_j(x)$ ,  $\hat{\chi}_j(x)$ . Betrachtet man sich nur eine Feld-Komponente  $\hat{\chi}(x)$ ,  $\hat{\chi}(x)$  je Gitterpunkt  $x$ , so wird die Anzahl der Doppler von 16 auf 4 reduziert (siehe [Kluberg-Stern et al.; 1983]). Der Index  $j$  kann somit als Flavor-Index  $\alpha = 1, \dots, N_f$  interpretiert werden, da die Masse

$m$  in der Wirkung für jedes  $j$  unabhängig gewählt werden kann. Mit der Transformation  $\chi = a^{\frac{3}{2}} \hat{\chi}$  lautet die freie Kogut-Susskind-Wirkung für beliebige Flavor-Zahl:

$$S_F^{(\text{stagg.})} = \sum_x \sum_{\alpha=1}^{N_f} \left\{ \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\hat{\mu}}(x) \left( \bar{\chi}_{\alpha}(x) \frac{\chi_{\alpha}(x + \hat{\mu}) - \chi_{\alpha}(x - \hat{\mu})}{a} \right) + am_{\alpha} \bar{\chi}_{\alpha}(x) \chi_{\alpha}(x) \right\}. \quad (1.22)$$

Die Zahlen  $\eta_{\mu}$  sind die **Kogut-Susskind-Phasen**. Diese erhält man durch Umsortieren der  $\gamma$ -Matrizen in Gl.(1.15). Üblicherweise wird die  $T(x)$ -Matrix folgendermaßen definiert:

$$T(x) = \gamma_0^{x_0} \gamma_1^{x_1} \gamma_2^{x_2} \gamma_3^{x_3}. \quad (1.23)$$

Aus dieser Definition erhält man die Kogut-Susskind-Phasen

$$\eta_0(x) = 1, \quad \eta_{\mu}(x) = (-1)^{\sum_{\nu < \mu} x_{\nu}} \quad \text{für } \mu \neq 0, \quad (1.24)$$

wobei  $\mu = 0$  dem Zeit-Index entspricht. Fordert man zusätzlich eine lokale Eichinvarianz in der Kogut-Susskind-Wirkung, so muss die Differenz in Gl.(1.22) durch eine kovariante Ableitung auf dem Gitter ersetzt werden. Der endgültige Ausdruck für die Kogut-Susskind-Wirkung ist unter Eichtransformationen invariant und lautet somit (siehe [Kogut, Susskind; 1975]):

$$S_F^{(\text{stagg.})} = \sum_x \sum_{\alpha=1}^{N_f} \left\{ \sum_{\mu=0}^3 \eta_{\hat{\mu}}(x) \left( \bar{\chi}_{\alpha}(x) U_{\hat{\mu}}(x) \chi_{\alpha}(x + \hat{\mu}) - \bar{\chi}_{\alpha}(x + \hat{\mu}) U_{\hat{\mu}}^{\dagger} \chi_{\alpha}(x) \right) + 2am_{\alpha} \bar{\chi}_{\alpha}(x) \chi_{\alpha}(x) \right\}. \quad (1.25)$$

Damit liegt eine Wirkung vor, in der jedes Feld nur eine Komponente pro Gitterpunkt besitzt, wodurch der einzige Hinweis auf einen Dirac- bzw. Spin-Index in den (lokalen) Kogut-Susskind-Phasen  $\eta_{\mu}$  vorliegt. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade pro Gitterpunkt um einen Faktor 4 reduziert.

Die soeben vorgestellte Kogut-Susskind-Wirkung konvergiert im Kontinuumslimites  $a \rightarrow 0$  gegen eine Wirkung, die ein System aus vier, nicht-wechselwirkenden Dirac-Teilchen beschreibt (siehe [Kogut, Susskind; 1975]). Betrachtet man sich für  $N_f = 1$  Flavor einen Hyper-Würfel auf dem Gitter der Kantenlänge  $a$  und Vertex-Position  $x = 2N$  ( $x$  und  $N$  sind Multi-Indizes), so lauten seine 16 Vertex-Koordinaten  $r = 2N + \rho$ , wobei der Vektor  $\rho$  nur aus 0- und 1-Einträgen besteht. Dann ist es möglich, alle Werte des Kogut-Susskind-Feldes  $\chi(r)$  in einem Spinor zusammen zu fassen,

$$\chi_{\rho}(N) \equiv \chi(2N + \rho), \quad (1.26)$$

wobei  $\rho \in \{(0, 0, 0, 0), \dots, (1, 1, 1, 1)\}$  ein Multi-Index ist. Die Variable  $N$  deutet auf eine Position im Gitter mit Gitterabstand  $b \equiv 2a$  hin. Die Felder  $\chi_{\rho}(N)$  können linear kombiniert werden, um vier Dirac-Felder zu erzeugen.

Angangspunkt dieses Formalismus ist also eine kontinuierliche Theorie, die *ein* Fermion beschreibt, nun liegt aber eine Gitter-Theorie für *vier* Fermionen vor. Dieser Doppler-Freiheitsgrad wird als **Taste** definiert. Genau genommen, entspricht ein einzelnes Kogut-Susskind-Fermion exakt vier Tastes kontinuierlicher Fermionen (siehe [Kogut, Susskind; 1975] und [Kluberg-Stern et al.; 1983]). Mithilfe der Transformation

$$\psi_{\hat{a}b}(N) = \frac{1}{8} \sum_{\rho} (T_{\rho})_{\hat{a}b} \chi_{\rho}(N) \quad \text{mit} \quad T_{\rho} = \gamma_0^{\rho_0} \gamma_1^{\rho_1} \gamma_2^{\rho_2} \gamma_3^{\rho_3} \quad (1.27)$$

wird nicht nur der Spinor-Index (hier durch den zweiten Index  $b$  ausgedrückt) reproduziert, sondern auch der Bruch der **Taste-Symmetrie** verdeutlicht (der Index  $\hat{a}$  ist der **Taste-Index**).

Zusätzlich sei angemerkt, dass die Kogut-Susskind-Wirkung im chiralen Limes, (d.h für  $m_{\alpha} = 0$ ), keine vollständig gebrochene  $U_L(N_f) \times U_R(N_f)$ -Symmetrie aufweist. Transformiert man für ungerade bzw. gerade Gitterpunkte  $x$  die  $\bar{\chi}, \chi$ -Felder in der Kogut-Susskind-Wirkung (Gl.(1.22)) mit den Faktoren  $\alpha_o, \alpha_e \in U(1)$ , so bleibt der kinetische Term invariant, wogegen der Massenterm nur für  $\alpha_o = \alpha_e$  invariant ist. Im masselosen Fall liegt also eine reduzierte chirale  $U_o(1) \times U_e(1)$ -Symmetrie im Strong Coupling Limit vor, auch als **Even-Odd-Symmetrie** bekannt (siehe [Kogut, Susskind; 1975]).

Die Zustandssumme der Gitter-QCD - zentraler Ausgangspunkt für alle folgenden Berechnungen - lautet für Kogut-Susskind-Fermionen,

$$\mathcal{Z} = \int [dU][d\chi][d\bar{\chi}] e^{-S_F^{\text{stagg.}}}, \quad (1.28)$$

wobei das Integrationsmaß  $[dU] = \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x)$  das *Haar-Maß*  $dU$  der  $SU(N)$ -Eich-Gruppe enthält (siehe Appendix (A.2.1)). Das Maß des fermionischen Pfad-Integrals,  $[d\chi][d\bar{\chi}] = \prod_{x,\alpha,i} d\chi_{i,\alpha}(x) d\bar{\chi}_{i,\alpha}(x)$  beruht auf der Definition der Grassmann-Integration (siehe [Gattringer, Lang; 2008]). Die Grassmann-Felder in Gl.(1.28) können für  $N_f = 1$  Flavor analytisch ausintegriert werden, woraus die *Fermion-Determinante* resultiert (siehe Gl.(1.17) und [Gattringer, Lang; 2008]). Man erhält also die Zustandssumme:

$$\mathcal{Z} = \int [dU] \det(Q). \quad (1.29)$$

Mithilfe der *3d-effektiven Theorie*, die im folgenden Kapitel für Kogut-Susskind-Fermionen hergeleitet wird, werden die räumlichen Links in Gl.(1.28) ausintegriert. Die dabei entstehende effektive Wirkung,

$$e^{-S_{\text{eff.}}} = \int [dU_j] \det(Q), \quad (1.30)$$

ist nur noch von den zeitlichen Link-Variablen  $U_0$  abhängig. Damit lautet die zu untersuchende Zustandssumme:

$$\mathcal{Z} = \int [dU_0] e^{-S_{\text{eff.}}}. \quad (1.31)$$

## 2. Die Herleitung der 3d-effektiven Theorie

In diesem Kapitel wird eine **3d-effektive Theorie** für die Gitter-QCD mit  $N_f = 1$ -Flavor **schweren** Kogut-Susskind-Quarks in räumlicher, sowie in zeitlicher Richtung hergeleitet, um daraus die Single-Hop-Zustandssumme der Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$  ermitteln zu können. Die hierbei aufgeführten Aspekte basieren im Wesentlichen auf den Inhalten und Arbeiten von [Glesaaen; 2016], [Langelage; 2014] und [Neuman; 2015], in welchen bereits Resultate für Wilson-Fermionen vorliegen. Diese wiederum werden mit den hier aufgeführten Ergebnissen für Kogut-Susskind-Fermionen verglichen.

Die effektive Theorie dient zur Reproduktion der Gitter-QCD in einer gewissen Parameter-Region. In dieser Ausarbeitung wird das **Heavy-Quark-Mass-Regime**, also die Region **schwerer Quarks** im **Strong Coupling Limit** (d.h. bei unendlicher Kopplung  $\beta = \frac{2N}{g^2} \rightarrow 0$  für  $g \rightarrow \infty$ ) untersucht. Diese Theorie kann mit numerischen Methoden gelöst werden, in diesem Kapitel wird aber ein analytischer Ansatz zur Berechnung der Zustandssumme verfolgt. Die Single-Hop-Zustandssumme für Kogut-Susskind-Fermionen wird hergeleitet, um diese mit der Zustandssumme der *dualen Darstellung* auf eventuell übereinstimmende Koeffizienten zu untersuchen (siehe Kapitel 3).

Die Herleitung der effektiven Theorie wird folgendermaßen gegliedert: In Abschnitt 2.1 wird die effektive Theorie als generelle Strategie zur Trunkierung einer physikalischen Theorie kurz vorgestellt. In den darauffolgenden Abschnitten 2.2 und 2.3 wird die sogenannte *Hopping-Parameter-Entwicklung* der Fermion-Determinante dargelegt, die sowohl für Wilson-, als auch für Kogut-Susskind-Fermionen in einen statischen und kinetischen Anteil faktorisiert. Der kinetische Anteil der Fermion-Determinante wird hierbei über die effektive Kopplungskonstante  $h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}$  ausgedrückt und somit bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$  in Kapitel 2.5 untersucht. Um die räumliche Hopping-Parameter-Entwicklung bis zur Ordnung  $\kappa_s^2$  durchführen zu können, wird der *statische Quark-Propagator* für Kogut-Susskind-Fermionen benötigt und in Abschnitt 2.4 ermittelt.

Schließlich erfolgt in Kapitel 2.6 die Herleitung der Kogut-Susskind-Zustandssumme  $Z_2^{\text{stagg.}}$  durch Entwicklung der kinetischen Quark-Determinante bis zur Ordnung  $\kappa_s^2$ . Alle Berechnungen beschränken sich auf  $N_f = 1$  Flavor, können aber auch auf beliebige Flavor-Anzahlen erweitert werden.

### 2.1. Die 3d-effektive Theorie - Eine kurze Einführung

Der zentrale Aspekt bei der Herleitung der 3d-effektiven Theorie besteht darin, die räumlichen Freiheitsgrade der Zustandsfunktion heraus zu integrieren. Die Reduzierung von Freiheitsgraden vereinfacht numerische Auswertungen und mindert auch das zuvor diskutierte Vorzeichen-Problem. Integriert man die räumlichen Links in der Zustandsfunktion heraus,

$$Z = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x) \det(Q(U_\mu)) e^{-S_g[U_\mu]} \equiv \int \prod_x dU_0(x) e^{-S_{\text{eff}}[U_0]}, \quad (2.1)$$

so ergibt sich daraus die **effektive Wirkung**

$$\begin{aligned}
S_{\text{eff}} &= -\log\left(\int \prod_{x,i} dU_i(x) \det(Q(U_\mu)) e^{-S_g[U_\mu]}\right) \\
&= -\log\left(\int \prod_{x,i} dU_i(x) \det(Q_{\text{stat.}}) \det(Q_{\text{kin.}}) e^{-S_g[U_\mu]}\right) \\
&= -\log\left(\int \prod_{x,i} dU_i(x) \det(Q_{\text{stat.}}) (1 - \text{tr}[PM] + \mathcal{O}(\kappa_s^4)) e^{-S_g[U_\mu]}\right),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

die in dieser Ausarbeitung genutzt wird, um die kinetische Quark-Determinante bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$  zu trunkieren.

Im Folgenden wird eine Entwicklungsmethode vorgestellt, die für die Herleitung der 3d-effektiven Theorie relevant ist.

## 2.2. Die Hopping-Parameter-Entwicklung

Führt man Gitter-Simulationen selbst bei verschwindendem chemischen Potential  $\mu$  durch, so ist die Berechnung der Fermion-Determinante mit einem hohen Rechenaufwand verbunden. Für **schwere Quarks** nimmt die Quark-Matrix in dieser Determinante annähernd eine Block-Diagonal-Form an, bei leichten Quarks dagegen delokalisiert die Fermion-Dynamik, sodass keine weiteren Vereinfachungen vorgenommen werden können. Deshalb werden in diesem Kapitel schwere Quarks betrachtet. Damit besteht die Möglichkeit, die sogenannte **Hopping-Parameter-Entwicklung** anzuwenden. Dabei wird der Boltzmann-Faktor, der die fermionischen Wechselwirkungsterme enthält, nach dem *Hopping-Parameter* entwickelt. Mit der Hopping-Parameter-Entwicklung kann eine effektive Theorie für schwere Quarks hergeleitet werden. Durch Reskalieren der Felder in Gl.(1.16) kann die darin auftretende Quark-Matrix für  $N_f = 1$ -Flavour folgendermaßen umschrieben werden,

$$Q_{yx} = \begin{cases} \delta_{yx} - \kappa H_{yx}, & \kappa = \frac{1}{2(4+am)} \quad \text{für Wilson-Fermionen} \\ \delta_{yx} + \kappa H_{yx}, & \kappa = \frac{1}{2am} \quad \text{für Kogut-Susskind-Fermionen,} \end{cases} \tag{2.3}$$

wobei  $\kappa$  der Hopping-Parameter und  $H$  die *Hopping-Matrix* darstellen. Das positive Vorzeichen in der Quark-Matrix für Kogut-Susskind-Fermionen resultiert aus der positiven Kogut-Susskind-Wirkung (siehe Gl.(1.22), Gl.(1.25) bzw. [Kogut, Susskind; 1975]). Die Hopping-Matrix für Wilson-Fermionen (und Kogut-Susskind-Fermionen) mit Wilson-Parameter  $r = 1$  ( $r = 0$  für Kogut-Susskind-Fermionen) lautet

$$H_{yx} = \begin{cases} (1 \pm \gamma_0) e^{\pm a\mu} U_{\pm 0}(x) \delta_{y \mp \hat{0}, x} + \sum_{i=\pm 1}^{\pm 3} (1 \pm \gamma_i) U_i(x) \delta_{y - \hat{i}, x} & \text{für Wilson-Fermionen} \\ \pm \eta_0(x) e^{\pm a\mu} U_{\pm 0}(x) \delta_{y \mp \hat{0}, x} + \sum_{i=\pm 1}^{\pm 3} \pm \eta_i(x) U_i(x) \delta_{y - \hat{i}, x} & \text{für K-S-Fermionen.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Die Hopping-Matrix für Kogut-Susskind-Fermionen enthält im Gegensatz zu den Wilson-Fermionen keine  $\gamma$ -Matrizen, da die Information zur Spin-Struktur in den *Kogut-Susskind-Phasen* enthalten ist,

$$\eta_0(x) = 1, \quad \eta_i(x) = (-1)^{\sum_{j<i} x_j} \quad \text{für } i = 1, 2, 3. \quad (2.5)$$

In einem späteren Abschnitt wird der Fermion-Propagator für die statische Quark-Matrix,  $Q_{\text{stat}}^{-1}$ , berechnet. Der Fermion-Propagator kann über Potenzen in  $\kappa$  ausgedrückt werden,

$$Q_{yx}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n (H^n)_{yx}. \quad (2.6)$$

Da die Hopping-Matrix  $H$  ein Kronecker-Delta  $\delta_{y+\hat{\mu},x}$  enthält, beschreibt diese einen einzelnen diskreten *Hüpfvorgang* auf dem Gitter. Der volle Fermion-Propagator ist somit die Summe aller Fermion-Linien, die am Gitterpunkt  $x$  beginnen und in  $y$  enden. Bei Wilson-Fermionen enthält die Hopping-Matrix zusätzlich einen Spin-Faktor  $(1 \pm \gamma_\mu)$ . Aufgrund der Identität  $(1 - \gamma_\mu)(1 + \gamma_\mu) = 0$  ist das sogenannte *Back-Tracking* nicht erlaubt, das bedeutet, es können für Wilson-Fermionen lediglich Pfade ohne „180°-Wendungen“ beitragen. Bei Kogut-Susskind-Fermionen dagegen liegt solch ein Spin-Faktor nicht vor, sodass die Back-Tracking-Eigenschaft hier ihre Gültigkeit behält.

Die Determinante der Fermion-Matrix,  $\det(Q)$ , kann unter Benutzung der *Spur-Logarithmus-Identität* ermittelt werden,

$$\det(Q) = \begin{cases} \exp(\text{tr} \log(\mathbf{1} - \kappa H)) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \kappa^n \text{tr}(H^n)\right) & \text{für Wilson-Fermionen} \\ \exp(\text{tr} \log(\mathbf{1} + \kappa H)) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \kappa^n \text{tr}(H^n)\right) & \text{für K-S-Fermionen} \end{cases} \quad (2.7)$$

Die Spur über  $H^n$  ergibt alle geschlossenen Fermion-Loops der Länge  $n$  mit oder ohne Back-Tracking-Eigenschaft. Durch die Hopping-Parameter-Entwicklung wird erkennbar, dass der Fermion-Propagator der Summe aller Fermion-Linien entspricht und die Determinante der Fermion-Matrix die Exponentialfunktion aller Fermion-Schleifen darstellt.

### 2.3. Die 3d-effektive Theorie im Strong Coupling Limit $\beta \rightarrow 0$

Der erste Schritt zur Herleitung einer drei-dimensionalen effektiven Theorie schwerer Quarks im Strong-Coupling-Limit besteht darin, die Hopping-Matrix in Gl.(2.4) in zeitlich, sowie räumlich orientierte *Hops* (= Hüpfprozesse) zu trennen,

$$H_{yx} = T_{yx} + \sum_{i=1}^3 S_{i,yx}, \quad (2.8)$$

wobei die zeitlichen und räumlichen Hopping-Matrizen erneut in positive und negative Komponenten, den **Forward-** und **Backward-Hop-Matrizen**, zerlegt werden können,  $T = T^+ + T^-$ ,  $S_i = S_i^+ + S_i^-$ . Dabei gilt

$$T_{yx}^\pm = \begin{cases} (1 \pm \gamma_0)e^{\pm a\mu}U_{\pm 0}(x)\delta_{\vec{y},\vec{x}}\delta_{t_y,t_x\pm 1} & \text{für Wilson-Fermionen} \\ \pm\eta_0(x)e^{\pm a\mu}U_{\pm 0}(x)\delta_{\vec{y},\vec{x}}\delta_{t_y,t_x\pm 1} & \text{für K-S-Fermionen,} \end{cases} \quad (2.9)$$

sowie

$$S_{i,yx}^\pm = \begin{cases} (1 \pm \gamma_i)U_{\pm i}(x)\delta_{\vec{y},\vec{x}\pm\hat{i}}\delta_{t_y,t_x} & \text{für Wilson-Fermionen} \\ \pm\eta_i(x)U_{\pm i}(x)\delta_{\vec{y},\vec{x}\pm\hat{i}}\delta_{t_y,t_x} & \text{für K-S-Fermionen.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Die Fermion-Determinante kann somit in einen statischen und kinetischen Anteil faktorisiert werden (vgl. [Glesaaen; 2016]),

$$\det(Q) = \begin{cases} \det(\mathbf{1} - \kappa_\tau T - \kappa_s S) = \underbrace{\det(\mathbf{1} - \kappa_\tau T)}_{= Q_{\text{stat.}}} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \kappa_\tau T)^{-1}\kappa_s S)}_{= Q_{\text{kin.}}} & \text{für Wilson-Fermionen} \\ \det(\mathbf{1} + \kappa_\tau T + \kappa_s S) = \underbrace{\det(\mathbf{1} + \kappa_\tau T)}_{= Q_{\text{stat.}}} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{1} + (\mathbf{1} + \kappa_\tau T)^{-1}\kappa_s S)}_{= Q_{\text{kin.}}} & \text{für K-S-Fermionen.} \end{cases} \quad (2.11)$$

### 2.3.1. Die statische Quark-Determinante

Um die 3d-effektive Theorie für Kogut-Susskind-Fermionen herleiten zu können, werden zwei Größen benötigt: Der volle **Quark-Propagator**, der im darauffolgenden Abschnitt ermittelt wird, sowie die **statische Quark-Determinante**. Neben der Berechnung der statischen Quark-Determinante mittels Hopping-Parameter-Entwicklung erfolgt in diesem Abschnitt ein Vergleich der statischen Quark-Determinante  $\det(Q_{\text{stat.},\text{Stagg.}})$  mit einem bereits vorliegenden Resultat von [Bloch, Bruckmann; 2013] für die Fälle  $N_\tau = 2, 4, 6$ .

Die statische Quark-Determinante kann mit der Spur-Logarithmus-Identität näher bestimmt werden und lautet:

$$\det(Q_{\text{stat.}}) = \begin{cases} \det(\mathbf{1} - \kappa_\tau T) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\kappa_\tau^n \text{tr}(T^+ + T^-)^n\right) & \text{für Wilson-Fermionen} \\ \det(\mathbf{1} + \kappa_\tau T) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\kappa_\tau^n \text{tr}(T^+ + T^-)^n\right) & \text{für K-S-Fermionen} \end{cases} \quad (2.12)$$

Da für **Wilson-Fermionen** keine Backtracking-Einschränkung vorliegt, gibt es keine  $T^+T^-$ -Mischterme, sodass die statische Quark-Determinante in eine Fermion- und Anti-Fermion-Determinante faktorisiert,

$$\det(\mathbf{1} - \kappa_\tau T) = \det(\mathbf{1} - \kappa_\tau T^+) \det(\mathbf{1} - \kappa_\tau T^-). \quad (2.13)$$

Diese Faktorisierungs-Eigenschaft kann auf **Kogut-Susskind-Fermionen** übertragen werden, allerdings gilt infolge der Backtracking-Eigenschaft für Kogut-Susskind-Fermionen:

$$\begin{aligned} (T^+T^-)_{xz} &= \sum_y T_{xy}^+ T_{yz}^- = - \sum_y U_{+0}(y) \delta_{\vec{x},\vec{y}} \delta_{t_x,t_y+1} U_{-0}(z) \delta_{\vec{y},\vec{z}} \delta_{t_y,t_z-1} \\ &= -U_0(\vec{x}, t_x) U_0^\dagger(\vec{x}, t_x) \delta_{\vec{x},\vec{z}} = - (\mathbf{1}_{N_s^3 \times N_s^3} \otimes \mathbf{1}_{N_\tau \times N_\tau} \otimes \mathbf{1}_{N_c \times N_c})_{\vec{x}\vec{z}, t_x t_z, ij} \end{aligned}$$

Dabei wurde  $U_\mu(x) = U_{-\mu}^\dagger(x + \hat{\mu})$  benutzt, sodass beide  $U$ -Matrizen dieselben Zeitargumente  $t_x$  aufweisen. Das negative Vorzeichen folgt aus der Definition von  $T^-$ . Die Indizes  $i, j$  sind Farbindizes der  $U$ -Matrizen. Es entsteht also zusätzlich ein vom chemischen Potential  $\mu$  unabhängiger Term, der im nachfolgenden Endresultat für die statische Quark-Determinante erneut auftritt. Ausgehend von Gl.(2.12) kann dieser Faktor für beliebige gerade  $n$  mittels *Mathematica* ausgewertet werden, indem man die Identität  $\text{tr}_{c,t}[(T^+T^-)^{\frac{n}{2}}] = (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot N_c N_\tau$  verwendet:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \binom{n}{2} \kappa_\tau^n \text{tr}_{c,t}[(T^+T^-)^{\frac{n}{2}}]\right) &= \exp\left(-N_c N_\tau \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n} \binom{n}{2} \kappa_\tau^n\right) \\ &= \exp\left(N_c N_\tau \log\left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\kappa_\tau^2}\right)\right]\right) = \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4\kappa_\tau^2}\right)\right]^{N_\tau N_c} \quad (2.14) \\ &= \kappa_\tau^{N_c N_\tau} \left[\frac{1}{2\kappa_\tau} + \sqrt{\frac{1}{4\kappa_\tau^2} + 1}\right]^{N_\tau N_c} \equiv A_1^{N_c}. \end{aligned}$$

Die Spur-Operation in der Determinante schränkt die graphischen Beiträge auf geschlossene Schleifen ein, den sogenannten *Fermion-Loops*. Die Fermion-Determinante stellt somit die Exponentialfunktion einer Summe über geschlossene Loops dar. Jeder Schleifen-Term der Länge  $j$  tritt dabei mit einem Faktor  $\frac{\kappa_\tau^j}{j}$  auf (siehe [Gattringer, Lang; 2008]). Zusätzlich sorgt die Spur-Operation dafür, dass die statische Hopping-Matrix in vollen Windungen in Zeitrichtung resultiert. Ein solcher Term, der sich auf dem Gitter  $n$ -mal in *positiver* Richtung herumwindet, besitzt für **Wilson-Fermionen** die folgende Form:

$$\begin{aligned} (-1)^n \kappa_\tau^{nN_\tau} (1 + \gamma_0)^{nN_\tau} e^{nN_\tau a\mu} \sum_{i=0}^{N_\tau-1} \prod_{t_i=0}^{nN_\tau-1} U_0(\vec{x}, t_i) \\ = \frac{1}{2} N_\tau (-1)^n (2e^{a\mu} \kappa_\tau)^{nN_\tau} (1 + \gamma_0) W^n(\vec{x}). \quad (2.15) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $W(\vec{x}) = \prod_{t=0}^{N_\tau-1} U_0(\vec{x}, t)$  einen *ungetraceten Polyakov-Loop*, das negative Vorzeichen entsteht durch die Fermion-Antiperiodizität. Zudem wurde die Identität  $(1 \pm \gamma_\mu)^2 = 2(1 \pm \gamma_\mu)$  verwendet.

Der Anteil der statischen Quark-Determinante, der die positiven *Hops* in Zeitrichtung beschreibt, vereinfacht sich für **Wilson-Fermionen** zu

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \text{tr}_s(1 + \gamma_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-h_1)^n \text{tr}_c W^n(\vec{x})\right) = \prod_{\vec{x}} \det(1 + h_1 W(\vec{x}))^2, \quad (2.16)$$

wobei  $h_1(\mu) = (2\kappa_\tau e^{a\mu})^{N_\tau} = e^{(\mu - \log(\frac{1}{2\kappa_\tau})) / T} = z e^{-\log(\frac{1}{2\kappa_\tau}) / T} (= \bar{h}_1(-\mu))$  mit  $z = e^{a\mu N_\tau} = e^{\frac{\mu}{T}}$  der statische (Anti-)Loop-Gewichtungsfaktor für Wilson-Fermionen mit *Fugazitätsfaktor*  $z$  ist. Das Resultat in Gl.(2.16) tritt mit dem **Spin-Faktor** 2 auf, der aus der Spur-Operation  $\text{tr}_s$  resultiert. Die statische Quark-Determinante kann somit über die statischen Loop-Gewichtungsfaktoren ausgedrückt werden (siehe [Glesaaen; 2016]):

$$\det(Q_{\text{stat.}, \text{Wilson}}) = \prod_{\vec{x}} \det(1 + h_1 W(\vec{x}))^2 \cdot \det(1 + \bar{h}_1 W^\dagger(\vec{x}))^2 \\ \stackrel{N_c=3}{=} \prod_{\vec{x}} \left[ 1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3 \right]^2 \left[ 1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3 \right]^2. \quad (2.17)$$

Da  $W$  ein Produkt aus  $U_0$ -Matrizen ist, muss es zur selben Symmetrie-Gruppe gehören wie die  $U_0$ -Matrizen. Somit kann die Determinante durch eine Linearkombination von Spur-Operationen dargestellt werden. Mit dem *Cayley-Hamilton-Theorem* kann die Determinante also durch die in Gl(2.17) dargelegten **Polyakov-Loops**

$$L_{\vec{x}} = \text{tr}_c(W) = \text{tr}_c \left( \prod_{t=0}^{N_\tau-1} U_0(\vec{x}, t) \right) \quad (2.18)$$

für den  $SU(3)$ -Fall ausgedrückt werden. Eine explizite Berechnung der vollen Quark-Determinante für Wilson-Fermionen kann beispielsweise in [Stamatescu, Seiler; 2016] eingesehen werden. In [Glesaaen; 2016] wird die statische Quark-Determinante für Wilson-Fermionen über eine *Mercator-Reihe* ausgedrückt (siehe Appendix (A.2.5)).

Die statische Quark-Determinante kann auch für **Kogut-Susskind-Fermionen** auf Polyakov-Loops projiziert werden (siehe [Bloch, Bruckmann; 2013]). Dazu muss - wie bereits in Gl.(2.14) erläutert - die Backtracking-Eigenschaft berücksichtigt werden.

Vernachlässigt man allerdings in den Identitäten aus Gl.(2.15) und Gl.(2.16) die Gamma-Matrizen, sowie die Spur über alle Spin-Konfigurationen, so stellt man fest, dass die statischen Loop-Gewichtungsfaktoren für Kogut-Susskind-Fermionen keinen Spin-Faktor 2 aufweisen,

$$(-1)^n \kappa_\tau^{nN_\tau} e^{nN_\tau a\mu} \sum_{i=0}^{N_\tau-1} \prod_{t_i=0}^{nN_\tau-1} U_0(\vec{x}, t_i) \\ = N_\tau (-1)^n \underbrace{(\kappa_\tau e^{a\mu})^{nN_\tau}}_{\equiv h_{1,\text{stagg.}}^n} W^n(\vec{x}), \quad (2.19)$$

und das Quadrat der Farb-Determinante aus Gl.(2.16) entfällt,

$$\exp \left( - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-h_1)^n \text{tr}_c W^n(\vec{x}) \right) = \prod_{\vec{x}} \det(1 + h_1 W(\vec{x})). \quad (2.20)$$

Das in Gl.(2.20) angegebene Resultat entspricht übrigens der statischen Quark-Determinante für Kogut-Susskind-Fermionen im **Heavy-Dense-Grenzfall**, in welchem

das chemische Potential  $\mu$  und die Quark-Masse  $m_q$  unendlich groß gewählt werden, während das Static-Loop-Weight  $h_1 = (\kappa_\tau e^{a\mu})^{N_\tau} = e^{(\mu - \log(\frac{1}{\kappa_\tau}))/T}$  von der Größenordnung 1 ist (siehe [Rindlisbacher; 2018]).

In dieser Ausarbeitung wird das **Heavy-Quark-Mass-Regime** untersucht. Mit Gl.(2.14) und Gl.(2.20) kann die zugehörige statische Quark-Determinante für  $N_f = 1$ -Flavor **schwere Kogut-Susskind-Fermionen** folgendermaßen angesetzt werden (das Produkt  $\prod_{\vec{x}}$  wird zunächst vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \det(Q_{\text{stat., Stagg.}}) &= A_1^{N_c} \cdot \det_c(1 + h_1 W(\vec{x})) \cdot \det_c(1 + \bar{h}_1 W^\dagger(\vec{x})) \\ &= A_1^{N_c} \cdot \det_c(1 + h_1 W(\vec{x}) + \bar{h}_1 W^\dagger(\vec{x}) + \underbrace{\bar{h}_1 h_1}_{=\kappa_\tau^{2N_\tau}} \underbrace{W^\dagger(\vec{x})W(\vec{x})}_{=1}) \quad (2.21) \\ &= \kappa_\tau^{N_c N_\tau} \cdot A_1^{N_c} \cdot \det_c(\underbrace{\kappa_\tau^{N_\tau} + \kappa_\tau^{-N_\tau}}_{\equiv A(\kappa_\tau \rightarrow 0)} + e^{+a\mu N_\tau} W(\vec{x}) + e^{-a\mu N_\tau} W^\dagger(\vec{x})). \end{aligned}$$

Für den Fall  $N_c = 3$  erhält man:

$$\det(Q_{\text{stat., Stagg.}}) = A_1^3 \cdot \prod_{\vec{x}} \left[ 1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3 \right] \left[ 1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3 \right] \quad (2.22)$$

Die statische Quark-Determinante für Kogut-Susskind-Fermionen kann somit in 0 + 1-Dimensionen für gerade  $N_\tau$  auf die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix reduziert werden. In [Bloch, Bruckmann; 2013] liegt ein vergleichbares Ergebnis für die Quark-Determinante vor:

$$\det(Q_{\text{stat.}}) = \frac{1}{2^{3N_\tau}} \det_c(A \mathbf{1}_{3 \times 3} + e^{\frac{\mu}{T}} W(\vec{x}) + e^{-\frac{\mu}{T}} W^\dagger(\vec{x})). \quad (2.23)$$

Dabei ist

$$A = 2 \cosh(\mu_c/T) \quad (2.24)$$

der symmetrische Anteil der Zustandsfunktion mit dem kritischen chemischen Potential  $a\mu_c = \text{arsinh}(am)$ , sowie  $1/T = N_\tau a$ . Mit dem Hopping-Parameter  $\kappa_\tau = \frac{1}{2am_q}$  für Kogut-Susskind-Fermionen erhält man somit:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cosh\left(N_\tau \text{arsinh}\left(\frac{1}{2\kappa_\tau}\right)\right) \quad (2.25) \\ &\stackrel{\text{Mathematica}}{=} \left[ \frac{1}{2\kappa_\tau} + \sqrt{\frac{1}{4\kappa_\tau^2} + 1} \right]^{N_\tau} + \left[ \frac{1}{2\kappa_\tau} + \sqrt{\frac{1}{4\kappa_\tau^2} + 1} \right]^{-N_\tau}. \end{aligned}$$

Das Resultat für die statische Quark-Determinante in Gl.(2.21) stimmt - mit Ausnahme des konstanten Faktors  $\frac{1}{2^{3N_\tau}}$  und der Tatsache, dass in Gl.(2.21) nur die  $\kappa_\tau^{N_\tau}$ -Potenzen aus der  $\kappa_\tau \rightarrow 0$ -Entwicklung von Gl.(2.25) berücksichtigt werden - vollständig mit dem Ergebnis aus [Bloch, Bruckmann; 2013] in Gl.(2.23) überein (für die vollständige Entwicklung von Gl.(2.25) für schwere Quarks siehe Appendix (A.2.6)). Zusätzlich stellt man fest, dass der

Vorfaktor  $A_1$  (siehe Gl.(2.14)) - bis auf den Faktor  $\kappa_\tau^{N_c N_\tau}$  - dem ersten Summanden in Gl.(2.25) entspricht.

Der Ausdruck in Gl.(2.25) stellt ein Polynom in  $\kappa_\tau$  für einen festen  $N_\tau$ -Wert dar. So lautet der  $A$ -Term für  $N_\tau = 2$ :

$$A(N_\tau = 2) = 2 \cosh\left(2 \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2\kappa_\tau}\right)\right) = 2 + \kappa_\tau^{-2}. \quad (2.26)$$

Im Folgenden wird der Ausdruck für  $\det(Q_{\text{stat.}})$  in Gl.(2.23) mithilfe von *Mathematica* explizit berechnet:

$$\begin{aligned} \det(Q_{\text{stat.}}) &= e^{3N_\tau a\mu} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(W)\operatorname{tr}(W^2) + \frac{1}{3}\operatorname{tr}(W^3) + \frac{1}{6}(\operatorname{tr}(W))^3\right)}_{=\det(W)=1} \\ &+ e^{2N_\tau a\mu} \underbrace{\left(\frac{1}{2}A(\operatorname{tr}(W))^2 - \frac{1}{2}A \cdot \underbrace{\operatorname{tr}(W^2)}_{=(\operatorname{tr}(W))^2 - 2\operatorname{tr}(W^\dagger)}\right)}_{=A \cdot \operatorname{tr}(W^\dagger)} \\ &+ e^{N_\tau a\mu} \underbrace{\left((A^2 - 2)\operatorname{tr}(W) + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(W))^2\operatorname{tr}(W^\dagger) - \frac{1}{2} \underbrace{\operatorname{tr}(W^2)}_{=(\operatorname{tr}(W))^2 - 2\operatorname{tr}(W^\dagger)} \operatorname{tr}(W^\dagger)\right)}_{=(A^2 - 2)\operatorname{tr}(W) + (\operatorname{tr}(W^\dagger))^2} \\ &+ A^3 - 3A + A \cdot \underbrace{\operatorname{tr}(W)\operatorname{tr}(W^\dagger)}_{=|\operatorname{tr}(W)|^2} \quad (2.27) \\ &+ e^{-N_\tau a\mu} \underbrace{\left((A^2 - 2)\operatorname{tr}(W^\dagger) + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}(W^\dagger))^2\operatorname{tr}(W) - \frac{1}{2} \underbrace{\operatorname{tr}((W^\dagger)^2)}_{=(\operatorname{tr}(W^\dagger))^2 - 2\operatorname{tr}(W)} \operatorname{tr}(W)\right)}_{=(A^2 - 2)\operatorname{tr}(W^\dagger) + (\operatorname{tr}(W))^2} \\ &+ e^{-2N_\tau a\mu} \underbrace{\left(\frac{1}{2}A(\operatorname{tr}(W^\dagger))^2 - \frac{1}{2}A \cdot \underbrace{\operatorname{tr}((W^\dagger)^2)}_{=(\operatorname{tr}(W^\dagger))^2 - 2\operatorname{tr}(W)}\right)}_{=A \cdot \operatorname{tr}(W)} \\ &+ e^{-3N_\tau a\mu} \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(W^\dagger)\operatorname{tr}((W^\dagger)^2) + \frac{1}{3}\operatorname{tr}((W^\dagger)^3) + \frac{1}{6}(\operatorname{tr}(W^\dagger))^3\right)}_{=\det(W^\dagger)=1}. \end{aligned}$$

Dieses Resultat stimmt exakt mit der statischen Determinante aus [Bloch, Bruckmann; 2013], sowie mit Gl.(2.22) überein. Führt man nämlich in Gl.(2.22) die Polyakov-Loop-Integration aus, so erhält man die Zustandssumme im **Static Limit**

$$\mathcal{Z}_{\text{statisch}} \equiv \prod_{\vec{x}} z_0 = z_0^{N_s^3} \quad (2.28)$$

mit

$$\begin{aligned}
z_0 &= \int dW_{\vec{x}} \det(Q_{\text{stat.}}) = 1 + h_1^3 + \bar{h}_1^3 + \bar{h}_1 h_1 + \bar{h}_1^2 h_1^2 + \bar{h}_1^3 h_1^3 \\
&= \kappa_\tau^{3N_\tau} \left( 2 \cosh(3a\mu N_\tau) + \underbrace{\kappa_\tau^{+3N_\tau} + \kappa_\tau^{-3N_\tau} + \kappa_\tau^{+N_\tau} + \kappa_\tau^{-N_\tau}}_{\substack{\hat{=} \text{ f\"uhrender Ordnungsterm von } A^3 - 2A \text{ im} \\ \text{Heavy-Quark-Mass-Regime (siehe Appendix)}}} \right).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Die Polyakov-Loop-Integration von Gl.(2.27) ergibt die Zustandssumme im **Static Limit**

$$Z_{\text{static}} = \left( 2 \cosh(3a\mu N_\tau) + \underbrace{A^3 - 3A + A}_{=A^3 - 2A} \right)^{N_s^3}, \tag{2.30}$$

mit dem Polynom für den Fall  $N_\tau = 2$

$$\begin{aligned}
A^3 - 2A &= 4 + 10\kappa_\tau^{-2} + 6\kappa_\tau^{-4} + \kappa_\tau^{-6} \\
&= \kappa_\tau^{-6} \cdot (4\kappa_\tau^6 + 10\kappa_\tau^4 + 6\kappa_\tau^2 + 1).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Für die Fälle  $N_\tau = 4, 6$  erhält man:

$$A^3 - 2A = \begin{cases} \kappa_\tau^{-12}(4\kappa_\tau^{12} + 40\kappa_\tau^{10} + 106\kappa_\tau^8 + 112\kappa_\tau^6 + 54\kappa_\tau^4 + 12\kappa_\tau^2 + 1) & \text{für } N_\tau = 4 \\ \kappa_\tau^{-18}(4\kappa_\tau^{18} + 90\kappa_\tau^{16} + 546\kappa_\tau^{14} + 1387\kappa_\tau^{12} + 1782\kappa_\tau^{10} + 1287\kappa_\tau^8 + 546\kappa_\tau^6 \\ + 135\kappa_\tau^4 + 18\kappa_\tau^2 + 1) & \text{für } N_\tau = 6 \end{cases}.$$

Allerdings eignet sich die Darstellung in Gl.(2.22) für die später folgende Berechnung der  $\mathcal{Z}_2$ -Zustandssumme. Dafür gibt es zwei praktische Gründe: Zunächst soll die Single-Hop-Zustandssumme ausschließlich in Abhängigkeit der statischen Loop-Gewichtungsfaktoren  $h_1, \bar{h}_1$  ausgedrückt werden, um die zugehörigen Koeffizienten der beitragenden Quark-Antiquark-Paar-Konfigurationen zu erhalten. Zudem liegt die statische Quark-Determinante aus Gl.(2.21) bereits in faktorisierter Form vor, wodurch der Rechenaufwand bei der Ermittlung des  $\kappa_s^2$ -Korrekturterms der  $\mathcal{Z}_2$ -Zustandssumme deutlich reduziert wird.

Abschließend wird die Zustandssumme aus [Bloch, Bruckmann; 2013] in Gl.(2.27) mit der Zustandssumme aus der Hopping-Parameter-Entwicklung im **Static Limit** verglichen. Dazu wird der Ausdruck für die statische Quark-Determinante benötigt (siehe Gl.(2.12)). Die Farb-Indizes der  $U_{\pm 0}$ -Matrizen, die in den Forward-/Backward-Matrizen  $T_{t_x, t_y}^\pm$  enthalten sind, werden in den darauffolgenden Schritten berücksichtigt. Zudem erfolgt zunächst keine Integration über die zeitlichen Link-Variablen, um diejenigen Terme in der statischen Quark-Determinante identifizieren zu können, die auf Polyakov-Loops projiziert werden. Dies ermöglicht einen besseren Vergleich der oben aufgeführten statischen Quark-Determinante mit dem bereits diskutierten Resultat aus [Bloch, Bruckmann; 2013] - insbesondere mit dem Ausdruck  $A^3 - 3A$ , der offenbar nicht aus der Polyakov-Loop-Integration resultiert (siehe Gl.(2.27)). Um die statische Quark-Determinante aus

der Hopping-Parameter-Entwicklung mit dem  $A^3 - 2A$ -Ausdruck identifizieren zu können, wird Gl.(2.12) für die Fälle  $N_\tau = 2, 4, 6$  bis zur Ordnung  $\kappa_\tau^{N_c N_\tau}$  ( $= \kappa_\tau^6, \kappa_\tau^{12}, \kappa_\tau^{18}$ ) mit *Mathematica* entwickelt (es wird nur die Entwicklung bis  $\kappa_\tau^6$  angezeigt). Dazu wird die logarithmische Reihe in Gl.(2.12) ebenfalls bis zur 6. (12., 18.) Ordnung betrachtet, sowie nur gerade Potenzen in  $n$  berücksichtigt. Man erhält folglich für  $N_\tau = 2$ :

$$\begin{aligned}
\det(Q_{\text{stat.}, \text{Stagg.}})_{N_\tau=2} &= \exp\left(\sum_{n=1}^{N_c N_\tau=6} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \kappa_\tau^n \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^n]\right) \quad (2.32) \\
&= 1 + \underbrace{\kappa_\tau^2 \left(\frac{1}{2} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^2 - \frac{1}{2} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]\right)}_{=\det_{2 \times 2}(T^+ + T^-), \text{ Cayley-Hamilton-Theorem}} \\
&+ \underbrace{\kappa_\tau^4 \left(\frac{1}{24} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^4 - \frac{1}{4} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^2 \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]\right)}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} \\
&+ \frac{1}{8} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]^2 - \frac{1}{4} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] \\
&+ \underbrace{\kappa_\tau^6 \left(\frac{1}{720} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^6 - \frac{1}{48} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^4 \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]\right)}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} \\
&+ \frac{1}{16} \underbrace{[\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^2}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)^2]^2 - \frac{1}{48} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)^2]^3 \\
&+ \frac{1}{18} \underbrace{[\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^3}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^3] - \frac{1}{6} \underbrace{\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2] \\
&\times \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^3] + \frac{1}{18} [\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)^3]^2 - \frac{1}{8} \underbrace{[\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)]^2}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} \\
&\times \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] + \frac{1}{8} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2] \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] \\
&+ \frac{1}{5} \underbrace{\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-)}_{=0 \text{ für alle } N_\tau} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^5] - \frac{1}{6} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^6] \Big) + \mathcal{O}(\kappa_\tau^8).
\end{aligned}$$

Da die  $T^\pm$ -Matrizen nur 0-Einträge auf der Hauptdiagonalen besitzen, gilt für alle geraden  $N_\tau$  die Identität  $\text{tr}_{c,t}(T^+ + T^-) = 0$ . Zusätzlich wird mit Gl.(2.32) verdeutlicht, dass die statische Quark-Determinante mit dem *Cayley-Hamilton-Theorem* allgemein als Polynom der Ordnung  $N_c N_\tau$  in  $\kappa_\tau$  mit den kanonischen Determinanten  $\det_{n \times n}(T^+ + T^-)$  als Koeffizienten dargestellt werden kann,

$$\det(Q_{\text{stat.}}) = \sum_{n=0}^{N_c N_\tau} \kappa_\tau^n \det_{n \times n}(T^+ + T^-). \quad (2.33)$$

Die allgemeine Definition von  $\det_{n \times n}(T^+ + T^-)$  und der Beweis von Gl.(2.33) liegen in [Morozov; 2008] vor. Damit verfolgt die Hopping-Parameter-Entwicklung denselben Determinanten-Ansatz, der auch in [Bloch, Bruckmann; 2013] geschildert wird.

Im Folgenden werden die nicht-verschwindenden Beiträge aller  $\kappa_\tau$ -Ordnungen in Gl.(2.32) ermittelt. Man beginne mit dem Koeffizienten des  $\kappa_\tau^2$ -Beitrags:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\kappa_\tau^2 \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2] &= -\frac{1}{2}\kappa_\tau^2 \text{tr}_{c,t} \left[ \underbrace{T^+ T^+}_{=N_\tau L_{\vec{x}}} + \underbrace{T^- T^-}_{=N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{T^+ T^-}_{=-N_\tau N_c = -6} + T^- T^+ \right] \\
&\quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (-12)\kappa_\tau^2 = +6\kappa_\tau^2. \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Hierbei wurden die Identitäten  $\text{tr}_{c,t} [T^+ T^-] = -N_\tau N_c$ , sowie  $\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+] = N_\tau L_{\vec{x}}$  und  $\text{tr}_{c,t} [T^- T^-] = N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger$  verwendet, wobei die zuletzt genannten Terme nach der Polyakov-Loop-Integration verschwinden (zur Polyakov-Loop-Integration siehe Appendix A.2.3). Dieser Wert stimmt mit dem Koeffizienten des  $\kappa_\tau^2$ -Ordnungsterms im Ausdruck für  $A^3 - 2A$  aus Gl.(2.31) überein, nachdem man den Term  $\kappa_\tau^{N_c N_\tau = 6}$  heraus faktorisiert hat. Die Koeffizienten der höheren  $\kappa_\tau$ -Ordnungen gleichen ebenfalls den Werten von  $A^3 - 2A$ . So erhält man für die  $\kappa_\tau^4$ -Beiträge:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8}\text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]^2 &= \frac{1}{8} \left( \underbrace{(\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+])^2}_{=N_\tau^2 L_{\vec{x}}^2} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+] \text{tr}_{c,t} [T^- T^-]}_{=N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}}} \right) \\
&\quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow N_\tau^2 \text{ nach Polyakov-Integr.} \\
&+ \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+] \text{tr}_{c,t} [T^+ T^-]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+] \text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}} \\
&\quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \\
&+ \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^-] \text{tr}_{c,t} [T^+ T^+]}_{=N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}}} + \underbrace{(\text{tr}_{c,t} [T^- T^-])^2}_{=N_\tau^2 (L_{\vec{x}}^\dagger)^2} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^-] \text{tr}_{c,t} [T^+ T^-]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger} \\
&\quad \rightarrow N_\tau^2 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \\
&+ \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^-] \text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^-] \text{tr}_{c,t} [T^+ T^+]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}} \\
&\quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \\
&+ \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^-] \text{tr}_{c,t} [T^- T^-]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{(\text{tr}_{c,t} [T^+ T^-])^2}_{=N_c^2 N_\tau^2 = 36} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^-] \text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{=N_c^2 N_\tau^2 = 36} \\
&\quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \\
&+ \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{=-N_c N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger} \\
&\quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \quad \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{= N_c^2 N_\tau^2 = 36} \text{tr}_{c,t} [T^+ T^-] + \underbrace{(\text{tr}_{c,t} [T^- T^+])^2}_{= N_c^2 N_\tau^2 = 36} \\
& \rightarrow + \frac{1}{8} (4 \cdot 36 + 8) = +19 \tag{2.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] &= -\frac{1}{4} \left( \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+ T^+ T^+]}_{= N_\tau L_{\vec{x}}^2} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+ T^- T^-]}_{= N_c N_\tau = 6} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+ T^+ T^-]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}} \right. \\
& \quad \left. \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \right. \\
& + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+ T^- T^+]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^- T^+ T^+]}_{= N_c N_\tau = 6} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^- T^- T^-]}_{= N_\tau (L_{\vec{x}}^\dagger)^2} \\
& \quad \left. \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \right. \\
& + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^- T^+ T^-]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^- T^- T^+]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^- T^+ T^+]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}} \\
& \quad \left. \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \right. \\
& + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^- T^- T^-]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^- T^+ T^-]}_{= N_c N_\tau = 6} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^- T^- T^+]}_{= N_c N_\tau = 6} \\
& \quad \left. \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \right. \\
& + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+ T^+ T^+]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+ T^- T^-]}_{= -N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+ T^+ T^-]}_{= N_c N_\tau = 6} \\
& \quad \left. \rightarrow 0 \text{ nach Polyakov-Integr.} \right. \\
& + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+ T^- T^+]}_{= N_c N_\tau = 6} \Big) \\
& \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot 36 = -9 \tag{2.36} \\
& \rightarrow \frac{1}{8} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]^2 - \frac{1}{4} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] = +19 - 9 = 10.
\end{aligned}$$

Für die Berechnung des zweiten  $\kappa_\tau^4$ -Beitrags wurden die Identitäten  $\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+ T^- T^-] = \text{tr}_{c,t} [T^- T^+ T^+ T^-] = N_c N_\tau$  benutzt. Schließlich werden noch alle beitragenden Terme der Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_\tau^6)$  ermittelt:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{48} [\text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]]^3 &= -\frac{1}{48} \left( \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+]}_{= N_\tau L_{\vec{x}}} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^-]}_{= N_\tau L_{\vec{x}}^\dagger} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^-]}_{= -2N_\tau N_c = -12} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^- T^+]}_{= -2N_\tau N_c = -12} \right)^3 \\
& \rightarrow + \frac{1}{48} \cdot 2016 = +42 \tag{2.37} \\
\frac{1}{8} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2] \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] &\rightarrow + \frac{1}{8} \cdot (-8N_\tau^2 - 12N_c^2 N_\tau^2) = -58
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rightarrow -\frac{1}{48} [\text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]]^3 + \frac{1}{8} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2] \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^4] \\
&= 42 - 58 = -16.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Der Ausdruck  $\frac{1}{18} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^3]^2$  liefert keinen zusätzlichen Beitrag, da die einzelnen Summanden (wie z.B.  $\text{tr}_{c,t} [(T^+ T^+ T^+)]$ ) nicht auf Polyakov-Loops projiziert werden können. Der letzte Ausdruck der  $\kappa_\tau^6$ -Ordnung setzt sich aus insgesamt 64 Termen zusammen, von denen 20 Terme den nicht-verschwindenden Beitrag  $N_\tau N_c = 6$  aufweisen. Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem Faktor  $-\frac{1}{6}$  aus der Hopping-Parameter-Entwicklung, so erhält man schließlich:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{6} \text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^6] &= -\frac{1}{6} \left( \underbrace{\text{tr}_{c,t} [(T^+)^6]}_{=N_\tau L_{\vec{x}}^3} + \underbrace{\text{tr}_{c,t} [(T^-)^6]}_{=N_\tau (L_{\vec{x}}^\dagger)^3} + \dots \right. \\
&\quad \left. + 20 \underbrace{\text{tr}_{c,t} [T^+ T^+ T^+ T^- T^- T^-]}_{=-N_\tau N_c} \right) \\
&\rightarrow -\frac{1}{6} \cdot (-20) \cdot N_\tau N_c = +20.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Daraus ergibt sich der Koeffizient des  $\kappa_\tau^6$ -Ordnungsterms aus dem konstanten und  $L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}}$ -abhängigen Anteil der statischen Quark-Determinante,  $20 - 16 = +4$ . Das aus der statischen Quark-Determinante resultierende Polynom

$$1 + 6\kappa_\tau^2 + 10\kappa_\tau^4 + 4\kappa_\tau^6 \tag{2.40}$$

kann folglich mit dem Term  $A^3 - 2A$  aus [Bloch, Bruckmann; 2013] für  $N_\tau = 2$ , aber auch für höhere  $N_\tau$ -Werte, identifiziert werden.

Auf analoge Weise kann der Ausdruck für  $A$  über die Hopping-Parameter-Entwicklung (siehe Gl.(2.32)) kalkuliert werden, indem man alle Terme der Ordnungen  $\kappa_\tau^4$  und  $\kappa_\tau^6$  in Gl.(2.32) zusammenfasst, die - wie in Gl.(2.27) verdeutlicht wird - das (Anti-)Polyakov-Loop-Paar

$$L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}} \stackrel{N_\tau=2}{=} \text{tr}_c [T^+ T^+] \cdot \text{tr}_c [T^- T^-] \tag{2.41}$$

beinhalten. So erhält man beispielsweise aus dem  $\kappa_\tau^4$ -Ordnungsterm nach Ausführung der  $\text{tr}_t$ -Operation:

$$\frac{1}{8} [\text{tr}_{c,t} [(T^+ + T^-)^2]]^2 \rightarrow \frac{1}{8} \cdot 2N_\tau^2 L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}}. \tag{2.42}$$

Berücksichtigt man zusätzlich die  $L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}}$ -Anteile der  $\kappa_\tau^6$ -Ordnung, so generiert man - nach der Faktorisierung von  $\kappa_\tau^{N_c N_\tau} = \kappa_\tau^6$  - den Ausdruck für  $A$  im Fall  $N_\tau = 2$ :

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{8} \cdot 2N_\tau^2 \kappa_\tau^4 + \left( \frac{1}{4} N_\tau^3 N_c - N_\tau^2 \right) \kappa_\tau^6 \right) \cdot L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}} \\
&\rightarrow \underbrace{(2 + \kappa_\tau^{-2})}_{=A(N_\tau=2)} L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{x}}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Die Werte von  $A^3 - 2A$  wurden auch für die Fälle  $N_\tau = 4, 6$  berechnet, indem man Gl.(2.32) bis zur Ordnung  $N_c N_\tau$  entwickelt. Diese stimmen mit den zuvor genannten Resultaten überein, wobei

$$A = \begin{cases} \kappa_\tau^{-4}(2\kappa_\tau^4 + 4\kappa_\tau^2 + 1) & \text{für } N_\tau = 4 \\ \kappa_\tau^{-6}(2\kappa_\tau^6 + 9\kappa_\tau^4 + 6\kappa_\tau^2 + 1) & \text{für } N_\tau = 6 \end{cases}. \quad (2.44)$$

Damit stimmt die aus der Hopping-Parameter-Entwicklung hergeleitete statische Quark-Determinante für alle  $N_\tau$  mit dem Resultat aus [Bloch, Bruckmann; 2013] (siehe Gl.(2.27)) überein.

## 2.4. Der statische Quark-Propagator

Der statische Quark-Propagator kann auf verschiedene Weisen ermittelt werden ([Glesaaen; 2016]). Eine Möglichkeit besteht darin, das Cayley-Hamilton-Theorem anzuwenden. In [Glesaaen; 2016] wurde das Inverse der statischen Quark-Matrix direkt mit Zeilen-Stufen-Umformungen berechnet. Da für **Wilson-Fermionen** keine Back-Tracking-Eigenschaft vorliegt, also  $T^+T^- = 0$  gilt, kann der statische Propagator als Summe der Inversen der Forward- und Backward-Hop-Matrizen in Zeitrichtung geschrieben werden:

$$Q_{\text{stat.}}^{-1} \equiv (\mathbf{1} - \kappa_\tau T)^{-1} = (\mathbf{1} - \kappa_\tau T^+)^{-1} + (\mathbf{1} - \kappa_\tau T^-)^{-1} - \mathbf{1}. \quad (2.45)$$

Für **Kogut-Susskind-Fermionen** enthält der statische Propagator ebenfalls die in Gl.(2.45) genannten Matrix-Inversen, allerdings treten darin auch aufgrund der Back-Tracking-Eigenschaft zusätzliche Potenzen von  $T^\pm$ , sowie ein  $\kappa_\tau$ -abhängiger Faktor auf. Der statische Propagator kann durch eine *Von-Neumann-Reihe* im Entwicklungsparameter  $\kappa_\tau$  dargestellt (siehe [Glesaaen; 2016], [Gattringer, Lang; 2008]) und anschließend in allen (geraden) Ordnungen von  $\kappa_\tau$  resummiert werden:

$$\begin{aligned} Q_{\text{stat.},xy}^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\kappa_\tau)^n (T^n)_{xy} = \underbrace{\mathbf{1}_{\vec{x},\vec{y}} \otimes \mathbf{1}_{t_x,t_y}}_{\equiv \mathbf{1}_{xy}} + \kappa_\tau^2 \left[ (T^+)^2 + 2 \underbrace{(T^+T^-)}_{= -\mathbf{1}_{xy}} + (T^-)^2 \right]_{xy} \\ &+ \kappa_\tau^4 \left[ (T^+)^4 + 4 \underbrace{(T^+)^3 T^-}_{=(T^+)^2} + 6 \underbrace{(T^-)^2 (T^+)^2}_{\equiv \mathbf{1}_{xy}} + 4 \underbrace{(T^-)^3 T^+}_{=(T^-)^2} + (T^-)^4 \right]_{xy} + \mathcal{O}(\kappa_\tau^6) \\ &\stackrel{\text{Resummation}}{=} \mathbf{1} + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (T^+)^n \sum_{\substack{k=n \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \binom{k}{\frac{k-n}{2}} \kappa_\tau^k + \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (T^-)^n \sum_{\substack{k=n \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \binom{k}{\frac{k-n}{2}} \kappa_\tau^k \\ &+ \sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \binom{n}{\frac{n}{2}} \kappa_\tau^n \underbrace{[(T^+T^-)]^{\frac{n}{2}}}_{\equiv (-1)^{\frac{n}{2}} \mathbf{1}_{xy}}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Durch die Indexverschiebung  $i := k - n$  erhält man mit Hilfe von *Mathematica*:

$$\sum_{\substack{k=n \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \binom{k}{\frac{k-n}{2}} \kappa_\tau^k = 2^k \kappa_\tau^k. \quad (2.47)$$

Da sich die Indizes  $k, n \in \{2, \dots, N_\tau\}$  in derselben Indexmenge befinden, kann der Index  $k$  erneut in den Index  $n$  umbenannt werden. Daraus ergibt sich der statische Propagator für Kogut-Susskind-Fermionen (die Einheitsmatrix wird als 0-ter Summand in die Summe absorbiert):

$$\begin{aligned}
Q_{\text{stat.}}^{-1} &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (2\kappa_\tau)^n (T^+)^n + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (2\kappa_\tau)^n (T^-)^n - \mathbf{1} + \underbrace{\sum_{\substack{n=2 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \binom{n}{\frac{n}{2}} \kappa_\tau^n}_{= -\mathbf{1} + \frac{1}{\sqrt{1+(2\kappa_\tau)^2}}} \\
&= (\mathbf{1} - (2\kappa_\tau)^2 T^+)^{-1} + (\mathbf{1} - (2\kappa_\tau)^2 T^-)^{-1} - 2 \cdot \mathbf{1} + \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1+(2\kappa_\tau)^2}}_{\equiv k(\kappa_\tau) \propto \kappa_\tau^{-1}}}. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Die Matrizen  $(\mathbf{1} - \kappa_\tau T^\pm)$  weisen hinsichtlich des Zeit-Index eine nahezu obere bzw. untere Dreiecksform auf - mit Ausnahme eines Eintrages, der durch die (anti-)periodische Randbedingung entsteht. So hat die Forward-Hop-Matrix die Form:

$$(\mathbf{1} - \kappa_\tau T^+)_{t_y t_x} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho U_0(1) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -\rho U_0(2) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\rho U_0(3) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho U_0(N_\tau) & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Dabei ist  $\rho$  der in  $T^+$  auftretende, zeitunabhängige Faktor. Dieser lautet  $\rho = (1 + \gamma_0) \kappa_\tau e^{a\mu}$  für Wilson-Fermionen und  $\rho = (2\kappa_\tau)^2 e^{a\mu}$  für Kogut-Susskind-Fermionen.

Diese Matrix kann nun mithilfe von elementaren Zeilen-/Spalten-Umformungen invertiert werden (siehe [Glesaaen; 2016]),

$$\frac{1}{1 + \prod_{t=1}^{N_\tau} \rho U_0(t)} \begin{pmatrix} 1 & \rho U_0(1) & \rho^2 U_0(1) U_0(2) & \dots & \prod_{t=1}^{N_\tau-1} \rho U_0(t) \\ -\rho^{N_\tau-1} U_0^\dagger(2) & 1 & \rho U_0(2) & \dots & \prod_{t=2}^{N_\tau-1} \rho U_0(t) \\ -\rho^{N_\tau-2} U_0^\dagger(2) U_0^\dagger(3) & -\rho^{N_\tau-1} U_0^\dagger(3) & 1 & \dots & \prod_{t=3}^{N_\tau-1} \rho U_0(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\rho \prod_{t=2}^{N_\tau} \rho U_0^\dagger(t) & -\rho^2 \prod_{t=3}^{N_\tau} \rho U_0^\dagger(t) & -\rho^3 \prod_{t=4}^{N_\tau} \rho U_0^\dagger(t) & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

und nimmt in Komponentenschreibweise die folgende Form an

$$(\mathbf{1} - (2\kappa_\tau)^2 T^\pm)_{t_y t_x}^{-1} = \delta_{t_y, t_x} + B_{t_y t_x}^\pm. \quad (2.50)$$

Dabei ist

$$B_{t_y t_x}^+ = \frac{h_1 W}{1 + h_1 W} \delta_{t_y, t_x} + (2\kappa_\tau e^{a\mu})^{t_y - t_x} \frac{U_0(t_x \rightarrow t_y)}{1 + h_1 W} (\Theta_{t_y, t_x} - h_1 W \Theta_{t_x, t_y}), \quad (2.51)$$

$$B_{t_y t_x}^- = \frac{\bar{h}_1 W^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W^\dagger} \delta_{t_y, t_x} + (2\kappa_\tau e^{-a\mu})^{t_x - t_y} \frac{U_0(t_x \rightarrow t_y)}{1 + \bar{h}_1 W^\dagger} (\Theta_{t_x, t_y} - \bar{h}_1 W^\dagger \Theta_{t_y, t_x}). \quad (2.52)$$

Hierbei stellen  $\Theta$  die *Heaviside-Stufenfunktion*,  $W = \prod_{t=0}^{N_\tau-1} U_0(t)$  einen *ungetraceten* Polyakov-Loop und  $h_1(\mu) = (\kappa_\tau e^{a\mu})^{N_\tau} = z e^{(\mu - \log(\frac{1}{\kappa_\tau}))/T}$  ( $= \bar{h}_1(-\mu)$ ) den statischen (Anti-)Loop-Gewichtungsfaktor dar. Zusätzlich wurde der *Parallel-Transporter*  $U_0(t_x \rightarrow t_y)$  eingeführt:

$$U_0(t_x \rightarrow t_y) = \begin{cases} \prod_{t=t_x}^{t_y-1} U_0(t) & \text{falls } t_x < t_y \\ \prod_{t=t_y}^{t_x-1} U_0^\dagger(t) & \text{falls } t_x > t_y \end{cases}. \quad (2.53)$$

Der vollständige **Quark-Propagator** für Kogut-Susskind-Fermionen lautet somit:

$$\begin{aligned} Q_{\text{stat.}}^{-1} &= (\delta_{t_y, t_x} + B_{t_y t_x}^+) + (\delta_{t_y, t_x} + B_{t_y t_x}^-) - 2\delta_{t_y, t_x} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + (2\kappa_\tau)^2}}}_{\equiv k(\kappa_\tau)} \delta_{t_y, t_x} \\ &= B_{t_y t_x}^+ + B_{t_y t_x}^- + k(\kappa_\tau). \end{aligned} \quad (2.54)$$

## 2.5. Die räumliche Hopping-Parameter-Entwicklung

Es liegen nun alle erforderlichen Größen vor, um eine systematische Entwicklung der kinetischen Quark-Determinante im Hopping-Parameter  $\kappa_s$  zu beginnen. Zunächst werden die elementaren Bausteine der räumlichen Hopping-Parameter-Entwicklung für **Kogut-Susskind-Fermionen** vorgestellt:

$$P = \sum_{i=1}^3 P_i = (\mathbf{1} + \kappa_\tau T)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^3 \kappa_s S_i^+, \quad (2.55)$$

$$M = \sum_{i=1}^3 M_i = (\mathbf{1} + \kappa_\tau T)^{-1} \cdot \sum_{i=1}^3 \kappa_s S_i^-. \quad (2.56)$$

Die  $P$ - und  $M$ -Matrizen verdeutlichen hierbei einen Hüpfvorgang auf dem Gitter in positiver bzw. negativer Raumrichtung, der zusätzlich an einen beliebigen Hüpf-Prozess in Zeitrichtung gekoppelt sein kann und alle Windungen der Polyakov-Loops berücksichtigt.

Die zu entwickelnde kinetische Quark-Determinante lautet für Kogut-Susskind-Fermionen:

$$\det(Q_{\text{kin}}) = \det(\mathbf{1} + P + M) = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{tr}(P + M)^n\right). \quad (2.57)$$

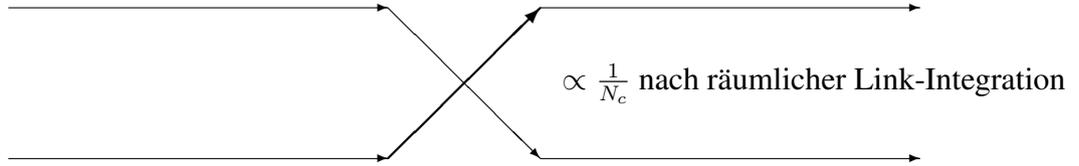
Da die Matrizen  $P$  und  $M$  je mit einem Faktor  $\kappa_s$  auftreten, kann man diese um  $\kappa_s \rightarrow 0$  entwickeln. Die kinetische Determinante wird durch alle geschlossenen Fermion-Linien beschrieben, daher wird bei der Entwicklung stets eine identische Anzahl an räumlichen *Hops* in positiver und negativer Richtung benötigt (hierbei werden Finite-Size-Effekte und -Randbedingungen vernachlässigt).

Ein wesentliches Ziel dieser Ausarbeitung besteht darin, den nicht-trivialen Beitrag niedrigster Ordnung der kinetischen Quark-Determinante zu berechnen - in diesem Fall also die Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$ . Die nicht-verschwindenden Beiträge der kinetischen Determinante bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^4)$  sind (siehe [Glesaaen; 2016]):

$$\det(Q_{\text{kin}}) = \exp\left(-\text{tr}(PM) - \text{tr}(PPMM) - \frac{1}{2}\text{tr}(PMPM) + \mathcal{O}(\kappa_s^6)\right). \quad (2.58)$$

Für jede Forward- bzw. Backward-Matrix  $P$  und  $M$  erhält man eine Vielzahl verschiedener Kombinationen, die sowohl eine Fermion-Fermion-, als auch Fermion-Anti-Fermion-Kopplung beschreiben. Die vier Kombinationsmöglichkeiten für den geringsten Ordnungsterm in  $\kappa_s$  (damit ist der  $\text{tr}(PM)$ -Term gemeint) können in FIGUR 4.2 in [Glesaaen; 2016] für Wilson-Fermionen eingesehen werden. Für Kogut-Susskind-Fermionen müssen aufgrund der Backtracking-Eigenschaft diejenigen Kombinationen berücksichtigt werden, in welchen sich zwei räumliche Links mit Farbfreiheitsgraden zu einem Meson überschneiden (in Abb. 1 wird einer dieser graphischen Beiträge gezeigt).

Um die räumlichen Link-Integrale berechnen zu können, sollte die Exponential-Funktion



**Abb. 1:** In dieser Abbildung wird die Wechselwirkung zweier Quark-Linien dargestellt, die zur Bildung eines Mesons führt. Dieser nicht-triviale Beitrag entsteht in der unten aufgeführten Berechnung der  $\kappa_s^2$ -Ordnung der Zustandsfunktion. Führt man die räumliche Link-Integration aus, so erhält man einen Faktor  $\frac{1}{N_c}$  (siehe Gl.(2.63)), der mit den Faktoren  $\kappa_s^2$  und  $N_\tau$  zum Kopplungsparameter  $h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}$  zusammengefasst werden kann.

aus der vorigen Gleichung entwickelt werden. Der nicht-triviale Beitrag der Ordnung  $\kappa_s^2$  der Zustandsfunktion lautet somit

$$\mathcal{Z}_2 = \int [dU]_\mu \det(Q_{\text{stat}}) e^{-\text{tr}(PM)} = \int [dU]_\mu \det(Q_{\text{stat}}) (1 - \text{tr}(PM) + \mathcal{O}(\kappa_s^4)). \quad (2.59)$$

Das einzige nicht-verschwindende Integral ist das über dem  $PM$ -Faktor. Betrachtet man zunächst nur die räumlichen Links, so muss für Kogut-Susskind-Fermionen folgendes Integral ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} I[PM] &= \int [dU]_i \text{tr}(PM) \\ &= -\kappa_s^2 \int [dU]_i \sum_{\vec{x}, j} \text{tr}_{c,t} \left( Q_{\text{stat}}^{-1}(\vec{x}) \eta_j(\vec{x}) U_j(\vec{x}, t_1) Q_{\text{stat}}^{-1}(\vec{x} + \hat{j}) \eta_j(\vec{x} + \hat{j}) U_j^\dagger(\vec{x}, t_2) \right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Die räumlichen Kogut-Susskind-Phasen  $\eta_j(\vec{x}) = (-1)^{\sum_{i<j} x_i}$  sind zeitunabhängig und können somit aus der Spur  $\text{tr}_{c,t}$  herausgezogen werden. Das negative Vorzeichen folgt aus der Definition der  $S^-$ -Matrizen. Zudem gilt die folgende Identität für Kogut-Susskind-Phasen (siehe [Sciarra; 2016] sowie Gl.(A.4)):

$$\eta_\mu(x + \hat{\mu}) = \eta_\mu(x), \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.61)$$

Daraus ergibt sich

$$\eta_j(\vec{x})\eta_j(\vec{x} + \hat{j}) = \eta_j(\vec{x})\eta_j(\vec{x}) = 1 \quad (2.62)$$

Damit ist der  $\kappa_s^2$ -Korrekturterm unabhängig von den Kogut-Susskind-Phasen. Unter Verwendung der Auswahlregel für Gruppenintegrale (siehe Gl.(A.32), Appendix (A.2.4)) kann das Integral in Gl.(2.60) nur dann einen nicht-verschwindenden Beitrag liefern, wenn die Zeitindizes identisch sind,  $t_1 = t_2$ .

Setzt man nun den statischen Quark-Propagator in Gl.(2.60) ein, folgt daraus:

$$\begin{aligned} I[PM] &= -\kappa_s^2 \int [dU]_i \sum_{\vec{x},j} \text{tr}_{c,t} \left( \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}}^+ + B_{\vec{x}}^- \right] U_j(\vec{x}, t_1) \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ + B_{\vec{x}+\hat{j}}^- \right] U_j^\dagger(\vec{x}, t_2) \right) \\ &= -\kappa_s^2 \text{tr}_t \sum_{\vec{x},j} \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}}^+ + B_{\vec{x}}^- \right]_{ab} \cdot \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ + B_{\vec{x}+\hat{j}}^- \right]_{cd} \delta_{t_1,t_2} \underbrace{\int dU U_{bc} U_{da}^\dagger}_{= \frac{1}{N_c} \delta_{ab} \delta_{cd}}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

In der zweiten Zeile wurden die Farb-Indizes eingeführt und die räumliche Link-Integration ausgeführt, wobei die räumlichen Links in  $U$  umbenannt wurden. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} I[PM] &= -\frac{\kappa_s^2}{N_c} \text{tr}_t \sum_{\vec{x},j} \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}}^+ + B_{\vec{x}}^- \right]_{ab} \cdot \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ + B_{\vec{x}+\hat{j}}^- \right]_{cd} \delta_{t_1,t_2} \delta_{ab} \delta_{cd} \\ &= -\frac{\kappa_s^2}{N_c} \text{tr}_t \sum_{\vec{x},j} \text{tr}_c \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}}^+ + B_{\vec{x}}^- \right] \cdot \text{tr}_c \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ + B_{\vec{x}+\hat{j}}^- \right] \delta_{t_1,t_2}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wird die Spur  $\text{tr}_t$  ausgeführt, indem man über das Kronecker-Delta  $\delta_{t_1,t_2}$  summiert und dadurch nur die Diagonalanteile der Matrizen  $B^\pm$  berücksichtigt:

$$\begin{aligned} I[PM] &= -\frac{\kappa_s^2}{N_c} \sum_{t_1,t_2} \sum_{\vec{x},j} \text{tr}_c \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}}^+ + B_{\vec{x}}^- \right]_{t_1 t_2} \cdot \text{tr}_c \left[ k(\kappa_\tau) + B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ + B_{\vec{x}+\hat{j}}^- \right]_{t_2 t_1} \delta_{t_1,t_2} \\ &= -\frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c} \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \text{tr}_c \left[ k(\kappa_\tau) + \frac{h_1 W_{\vec{x}}}{1 + h_1 W_{\vec{x}}} + \frac{\bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger} \right] \cdot \text{tr}_c \left[ k(\kappa_\tau) + \frac{h_1 W_{\vec{y}}}{1 + h_1 W_{\vec{y}}} + \frac{\bar{h}_1 W_{\vec{y}}^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W_{\vec{y}}^\dagger} \right]. \end{aligned}$$

Die Summe über die Zeitindizes ergibt einen Faktor  $N_\tau$ . Aus diesem Ausdruck wird ersichtlich, dass der niedrigste Ordnungsterm der kinetischen Determinante eine Nächste-Nachbar-Wechselwirkung zwischen Polyakov-Loop-abhängigen Objekten beschreibt. Für

weitere Berechnungen ist es sinnvoll, die folgende Kurznotation einzuführen (siehe [Glesaaen; 2016]):

$$W_{nm}(\vec{x}) \equiv \text{tr}_c \frac{(h_1 W_{\vec{x}})^m}{(1 + h_1 W_{\vec{x}})^n} \quad \text{und} \quad \bar{W}_{nm}(\vec{x}) \equiv \text{tr}_c \frac{(\bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger)^m}{(1 + \bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger)^n}. \quad (2.64)$$

Damit nimmt der niedrigste Ordnungsterm der effektiven Wirkung in räumlicher Hopping-Parameter-Entwicklung die folgende Gestalt an,

$$e^{-\text{tr}(PM)} = 1 + \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c} \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} (N_c k(\kappa_\tau) + W_{11}(\vec{x}) + \bar{W}_{11}(\vec{x})) (N_c k(\kappa_\tau) + W_{11}(\vec{y}) + \bar{W}_{11}(\vec{y})) + \mathcal{O}(u, \kappa_s^4). \quad (2.65)$$

In höheren Ordnungen des Hopping-Parameters  $\kappa_s$  entstehen sowohl zusätzliche Nächste-Nachbar-Beiträge, als auch nicht-lokale Terme, die das Gitter aufspannen. Beispiele für solche Beiträge können in FIG. 4.3 in [Glesaaen; 2016] eingesehen werden.

## 2.6. Die Zustandsfunktion $\mathcal{Z}_2^{\text{Stagg.}}$ in erster Ordnung Hopping-Parameter-Entwicklung

Im Fokus dieser Master-Arbeit steht die sogenannte **Single-Hop-Zustandssumme**  $\mathcal{Z}_2$ , welche Meson-Konfigurationen der Ordnung  $\kappa_s^2$  beschreibt. Diese wird in Abhängigkeit von den statischen Loop-Gewichtungsfaktoren  $h_1, \bar{h}_1$  für  $N_f = 1$  Flavor ausgedrückt. Mithilfe dieser Zustandssumme wird es möglich sein, Ordnungsparameter wie den Polyakov-Loop-Erwartungswert und das chirale Kondensat zu ermitteln (siehe Kapitel 3).

Ausgangspunkt für die Ermittlung dieser Zustandsfunktion ist die Zustandssumme der 3d-effektiven Theorie in Gl.(2.59). Die effektive Zustandssumme der Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen lautet also für Kogut-Susskind-Fermionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int [dU_0] \det(Q_{\text{stat}}) \prod_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \left[ 1 + \lambda \left( L_{\vec{x}} L_{\vec{y}}^\dagger + L_{\vec{x}}^\dagger L_{\vec{y}} \right) \right] \\ &\times \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \left[ 1 + h_2 \left( N_c^2 k^2(\kappa_\tau) + 2N_c k(\kappa_\tau) W_{11}(\vec{x}) + 2N_c k(\kappa_\tau) \bar{W}_{11}(\vec{x}) \right. \right. \\ &\left. \left. + W_{11}(\vec{x}) W_{11}(\vec{y}) + 2W_{11}(\vec{x}) \bar{W}_{11}(\vec{y}) + \bar{W}_{11}(\vec{x}) \bar{W}_{11}(\vec{y}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Hierbei ist  $\lambda \propto u_f^{N_\tau}$  die effektive Eichkopplung, die in dieser Berechnung vernachlässigt wird, um die pure Fermion-Theorie im Strong Coupling Limit zu untersuchen. Setzt man zusätzlich den Kopplungsparameter  $h_2 = 0$  bzw.  $\kappa_s = 0$ , so wird nur das Integral über die statische Quark-Determinante (das **Static Limit**) betrachtet:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(\lambda = 0, h_2 = 0) &= \int [dU_0] \det(Q_{\text{stat}}) = \int [dW] \det(Q_{\text{stat}}) \\ &= \int \prod_{\vec{x}} \left[ 1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3 \right] \left[ 1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3 \right] [dW]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Das Integrationsmaß weist keine Zeitabhängigkeit auf, es liegen nur noch die vollen Windungen der Polyakov-Loops als Freiheitsgrade vor,  $\int [dU_0] = \int [dW] \sqrt{\det(U_0)}$  mit  $\det(U_0) = 1$ .

Alle Gitterpunkte sind identisch, sodass das Produkt aus der Definition der statischen Quark-Determinante in Gl.(2.67) mit dem Integral vertauscht werden kann. Zudem besitzt das Integral für jeden Gitterpunkt stets denselben Wert. Führt man die Polyakov-Loop-Integration in Gl.(2.67) aus, so erhält man den Ausdruck für  $z_0^{N_s^3}$  (siehe Gl.(2.28) und Gl.(2.29)). Die in  $z_0$  auftretenden Terme können als Meson- und (Anti-)Baryon-Beiträge interpretiert werden. Im Gegensatz zum Wilson-Fermion-Fall (siehe Appendix (A.2.7)) weisen alle Beiträge von  $z_0$  den Spin-Entartungs-Koeffizienten „1“ auf, da die Spin-Information vollständig in den Kogut-Susskind-Phasen enthalten ist.

Um die Berechnung der Single-Hop-Zustandsfunktion  $\mathcal{Z}_2$  (siehe Gl.(2.59)) fortsetzen zu können, müssen zunächst die in Gl.(2.65) eingeführten **Knoten-Funktionen**  $W_{11}(\vec{x})$  und  $\bar{W}_{11}(\vec{x})$  näher bestimmt werden. Die Knoten-Funktionen beschreiben die Nächste-Nachbar-Wechselwirkungen der Quark-Antiquark-Paare (siehe Abb. 1). Mit dem *Cayley-Hamilton-Theorem* (siehe Appendix (A.2.7)) bekommt man:

$$W_{11}(\vec{x}) \equiv \text{tr}_c \left( \frac{h_1 W_{\vec{x}}}{1 + h_1 W_{\vec{x}}} \right) \stackrel{N_c=3}{=} \frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \quad (2.68)$$

$$\bar{W}_{11}(\vec{x}) \equiv \text{tr}_c \left( \frac{\bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger} \right) \stackrel{N_c=3}{=} \frac{\bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + 2\bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + 3\bar{h}_1^3}{1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3}. \quad (2.69)$$

Mit den vorliegenden Informationen können nun die folgenden Integrale für  $N_c = 3$  ausgewertet werden, indem man den Nennerterm der  $W_{11}$ -Funktionen mit den Faktoren der statischen Quark-Determinante (siehe Gl.(2.22)) kürzt:

$$\begin{aligned} \int W_{11}(\vec{x}) \det(Q_{\text{stat}}) [dW] &= A_1^3 \cdot \int \frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \\ &\quad \times \left[ 1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3 \right] \left[ 1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3 \right] dW_{\vec{x}} \\ &\quad \times \underbrace{\prod_{\{\vec{z}\} \setminus \vec{x}} \int \left[ 1 + h_1 L_{\vec{z}} + h_1^2 L_{\vec{z}}^\dagger + h_1^3 \right] \left[ 1 + \bar{h}_1 L_{\vec{z}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{z}} + \bar{h}_1^3 \right] dW_{\vec{z}}}_{= z_0^{N_s^d - 1}} \\ &= A_1^3 \cdot z_0^{N_s^d - 1} \left[ 3h_1^3 + \bar{h}_1 h_1 + 2\bar{h}_1^2 h_1^2 + 3\bar{h}_1^3 h_1^3 \right]. \quad (2.70) \end{aligned}$$

Für die Knoten-Funktion  $\bar{W}_{11}(\vec{x})$  bekommt man ein ähnliches Resultat:

$$\int \bar{W}_{11}(\vec{x}) \det(Q_{\text{stat}}) [dW] = A_1^3 \cdot z_0^{N_s^d - 1} \left[ 3\bar{h}_1^3 + \bar{h}_1 h_1 + 2\bar{h}_1^2 h_1^2 + 3\bar{h}_1^3 h_1^3 \right]. \quad (2.71)$$

In der Single-Hop-Zustandssumme treten zusätzlich Integrale über Produkte, bestehend aus den Knoten-Funktionen  $W_{11}(\vec{x})$ ,  $\bar{W}_{11}(\vec{x})$  und der statischen Quark-Determinante, auf.

Die Ergebnisse dieser Integrale werden hier nun vorgestellt:

$$\begin{aligned}
\int W_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y}) \det(Q_{\text{stat}}) [dW] &= A_1^3 \cdot \int \frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \\
&\times \left[1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3\right] \left[1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3\right] dW_{\vec{x}} \\
&\times \int \frac{h_1 L_{\vec{y}} + 2h_1^2 L_{\vec{y}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{y}} + h_1^2 L_{\vec{y}}^\dagger + h_1^3} \\
&\times \left[1 + h_1 L_{\vec{y}} + h_1^2 L_{\vec{y}}^\dagger + h_1^3\right] \left[1 + \bar{h}_1 L_{\vec{y}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{y}} + \bar{h}_1^3\right] dW_{\vec{y}} \\
&\times \underbrace{\prod_{\{\vec{z}\} \setminus \{\vec{x}, \vec{y}\}} \int \left[1 + h_1 L_{\vec{z}} + h_1^2 L_{\vec{z}}^\dagger + h_1^3\right] \left[1 + \bar{h}_1 L_{\vec{z}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{z}} + \bar{h}_1^3\right]}_{= z_0^{N_s^d - 2}} dW_{\vec{z}} \\
&= A_1^3 \cdot z_0^{N_s^d - 2} \left[9h_1^6 + 6\bar{h}_1 h_1^4 + 12\bar{h}_1^2 h_1^5 + 18\bar{h}_1^3 h_1^6 + \bar{h}_1^2 h_1^2 + 4\bar{h}_1^3 h_1^3 \right. \\
&\quad \left. + 10\bar{h}_1^4 h_1^4 + 12\bar{h}_1^5 h_1^5 + 9\bar{h}_1^6 h_1^6\right]. \tag{2.72}
\end{aligned}$$

Die übrigen Integralterme werden analog berechnet:

$$\begin{aligned}
\int \bar{W}_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y}) \det(Q_{\text{stat}}) [dW] &= A_1^3 \cdot z_0^{N_s^d - 2} \left[9\bar{h}_1^6 + 6\bar{h}_1^4 h_1 + 12\bar{h}_1^5 h_1^2 + 18\bar{h}_1^6 h_1^3 + \bar{h}_1^2 h_1^2 + 4\bar{h}_1^3 h_1^3 \right. \\
&\quad \left. + 10\bar{h}_1^4 h_1^4 + 12\bar{h}_1^5 h_1^5 + 9\bar{h}_1^6 h_1^6\right], \tag{2.73} \\
\int \bar{W}_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y}) \det(Q_{\text{stat}}) [dW] &= A_1^3 \cdot z_0^{N_s^d - 2} \left[6\bar{h}_1 h_1^4 + 3\bar{h}_1^4 h_1 + 6\bar{h}_1^5 h_1^2 + 6\bar{h}_1^2 h_1^5 + 9\bar{h}_1^6 h_1^3 + 9\bar{h}_1^3 h_1^6 \right. \\
&\quad \left. + \bar{h}_1^2 h_1^2 + 13\bar{h}_1^3 h_1^3 + 10\bar{h}_1^4 h_1^4 + 12\bar{h}_1^5 h_1^5 + 9\bar{h}_1^6 h_1^6\right].
\end{aligned}$$

Die Single-Hop-Zustandsfunktion  $\mathcal{Z}_2$  der niedrigsten Ordnung im Hopping-Parameter  $\kappa_s$  lautet im **Strong Coupling Limit** (d.h. für  $\lambda = 0$ ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} &= \int [dW] \det(Q_{\text{stat}}) \left(1 + h_2 \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \left[N_c^2 k^2(\kappa_\tau) + 2N_c k(\kappa_\tau) W_{11}(\vec{x}) + 2N_c k(\kappa_\tau) \bar{W}_{11}(\vec{x}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + W_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y}) + 2W_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y}) + \bar{W}_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y})\right]\right) \tag{2.74} \\
&= A_1^3 \left[(1 + 6N_c \Omega k^2(\kappa_\tau) \kappa_s^2) z_0^{N_s^d} + 12\Omega k(\kappa_\tau) \kappa_s^2 z_0^{N_s^d - 1} \left[3h_1^3 + 3\bar{h}_1^3 + 2\bar{h}_1 h_1 + 4\bar{h}_1^2 h_1^2 + 6\bar{h}_1^3 h_1^3\right] \right. \\
&\quad \left. + 6\Omega \frac{1}{N_c} \kappa_s^2 z_0^{N_s^d - 2} \left[9h_1^6 + 9\bar{h}_1^6 + 4\bar{h}_1^2 h_1^2 + 34\bar{h}_1^3 h_1^3 + 12\bar{h}_1 h_1^4 + 12\bar{h}_1^4 h_1 + 24\bar{h}_1^2 h_1^5 + 24\bar{h}_1^5 h_1^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 36\bar{h}_1^3 h_1^6 + 36\bar{h}_1^6 h_1^3 + 40\bar{h}_1^4 h_1^4 + 48\bar{h}_1^5 h_1^5 + 36\bar{h}_1^6 h_1^6\right]\right].
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Definition des Kopplungsparameters  $h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}$  aus dem vorigen Abschnitt, sowie

$$\sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \rightarrow 2d \cdot N_s^d \stackrel{d=3}{=} 6 \cdot N_s^3 \tag{2.75}$$

benutzt, wobei  $N_s^d$  dem  $d$ -dimensionalen Gitter-Volumen entspricht, welches im totalen Gittervolumen  $\Omega = N_\tau \cdot N_s^d$  enthalten ist. Der Faktor  $2d = 6$  entspricht hierbei der Anzahl aller Nächster-Nachbar-Punkte auf dem räumlichen Gitter.

Aus dem letzten Term in Gl.(2.74) wird ersichtlich, dass die Koeffizienten aller Quark-Anti-Quark-Paare, ausgedrückt durch die Kombinationen der *Static-Loop-Weights*  $\bar{h}_1^k h_1^l$  (für  $k - l \equiv 0 \pmod{N_c}$  liegt ein Baryon, für  $k = l$  ein Meson vor), identisch sind und damit ein symmetrisches Verhalten aufweisen.

Damit liegt ein Ausdruck für die Single-Hop-Zustandssumme für  $N_f = 1$ -Flavor **schwere Kogut-Susskind-Fermionen** im Strong Coupling-Limit vor. Mithilfe dieser Zustandsfunktion können nun Observablen wie der Polyakov-Loop-Erwartungswert  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$ , sowie das chirale Kondensat ermittelt werden. Die Berechnung dieser beiden Größen erfolgt im nächsten Kapitel, nachdem die Zustandsfunktion  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg}}$  mit dem entsprechenden Resultat in der dualen Darstellung und für den Wilson-Fermion-Fall verglichen worden ist.

### 3. Auswertung

In Kapitel 2.7 erfolgte die Herleitung der Zustandssumme  $Z_2^{\text{stagg.}}$  bis zur Ordnung  $\kappa_s^2$  im Strong Coupling Limit unter Benutzung einer *3d-effektiven Theorie*. Die in der Zustandssumme auftretende effektive Wirkung wurde dabei so definiert, sodass zunächst alle räumlichen Link-Variablen  $U_j$  ausintegriert wurden. Dies hatte zur Folge, dass die effektive Zustandssumme nur noch von den zeitlichen Links  $U_0$  abhängig war und somit vollständig auf *Polyakov-Loops*  $L_{\vec{x}}$  projiziert werden konnte.

In diesem Kapitel erfolgt die Auswertung relevanter Ordnungsparameter anhand der in Gl.(2.74) angegebenen Single-Hop-Zustandssumme  $Z_2^{\text{stagg.}}$  - es werden der **Polyakov-Loop-Erwartungswert**  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$ , sowie das **chirale Kondensat**  $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$  ermittelt.

Vor dem eigentlichen Auswertungsteil wird die  $Z_2$ -Zustandssumme für Kogut-Susskind-Fermionen sowohl mit der entsprechenden Zustandssumme in der **dualen Darstellung** für  $N_f = 1$  Flavor, als auch mit der **Single-Hop-Zustandssumme für Wilson-Fermionen** auf eventuelle Übereinstimmungen oder Abweichungen untersucht.

#### 3.1. Vergleich der Single-Hop-Zustandssumme $Z_2$ mit der dualen Darstellung

In diesem Abschnitt werden die in Gl.(2.74) auftretenden kombinatorischen Koeffizienten aller hadronischen und mesonischen Zustände - ausgedrückt durch Potenzen der Static-Loop-Weights  $\bar{h}_1^k h_1^l$ ,  $k, l \geq 1$  - mit denen der Kogut-Susskind-Fermion-Zustandssumme in der *dualen Darstellung* im *Strong Coupling Limit* verglichen. Die in diesem Kapitel aufgeführten Informationen zur dualen Darstellung basieren auf den Arbeiten von [Rossi, Wolff; 1984] bzw. [Fromm; 2010].

Die **duale Darstellung** stellt neben der effektiven Theorie einen möglichen Ansatz zur Abschwächung des Vorzeichenproblems dar. Anders als bei der effektiven Theorie, wird bei der dualen Darstellung die Strategie verfolgt, die Kogut-Susskind-Fermion-Wirkung  $S_F^{\text{stagg.}}$  (siehe Abschnitt 1.2.3) im Fermion-Hopping-Parameter  $2am_q$  zu entwickeln. Daraufhin wird in der Zustandssumme die Reihenfolge der Integration vertauscht, das bedeutet, es werden zunächst die Link-Variablen analytisch ausintegriert und anschließend die Grassmann-Variablen  $\bar{\chi}, \chi$ .

Ausgehend von der Zustandssumme der Gitter-QCD im Strong Coupling Limit (siehe Abschnitt 1.2.3)

$$Z(\mu, T, m_q) = \int [dU][d\chi][d\bar{\chi}] e^{S_F^{\text{stagg.}}} \quad (3.1)$$

mit der Fermion-Wirkung für 1-Flavor Kogut-Susskind-Fermionen (siehe Gl.(1.25) bzw. [Kogut, Susskind; 1975]) kann die Link-Integration  $\int [dU] = \int \prod_{x,\mu} dU_\mu(x)$  in Gl.(3.1)

aufgrund des zu betrachtenden *Strong Coupling Limit* herausfaktoriert werden:

$$\begin{aligned} Z &= \int \prod_x \left( d\chi(x) d\bar{\chi}(x) e^{2am_q \bar{\chi}(x)\chi(x)} \prod_{\mu} \left[ dU_{\mu}(x) e^{\eta_{\hat{\mu}}(x) (\bar{\chi}(x)U_{\mu}(x)\chi(x+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(x+\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x)\chi(x))} \right] \right) \\ &\equiv \int \prod_x \left( d\chi(x) d\bar{\chi}(x) e^{2am_q \bar{\chi}(x)\chi(x)} \prod_{\mu} z(x, \mu) \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Im zweiten Schritt wurde das *Ein-Link-Integral*  $z(x, \mu)$  eingeführt (siehe [Fromm; 2010]),

$$z(x, \mu) = \int_G dg e^{\text{tr}(gm^{\dagger} + mg^{\dagger})}, \quad (3.3)$$

wobei  $G$  die Eich-Gruppe mit Gruppen-Elementen  $g$  bezeichnet. Wählt man  $y = x + \hat{\mu}$ , so lauten die Matrizen  $m, m^{\dagger}$  mit Farb-Indizes  $(m)_{ij} = \chi_i(x)\bar{\chi}_j(y)$  und  $(m^{\dagger})_{kl} = -\chi_k(y)\bar{\chi}_l(x)$ .

Das Ein-Link-Integral in Gl.(3.3) ist bekannt und es existieren bereits geschlossene Ausdrücke für verschiedene Eich-Gruppen, sodass  $z(x, \mu)$  über Gruppen-Invarianten darstellbar ist (siehe [Eriksson, Svartholm; 1981], [Brower, Nauenberg; 1981]). Für die  $SU(N)$ -Eichgruppe kann das Ergebnis für  $z(x, \mu)$  in [Fromm; 2010] eingesehen werden.

Die endgültige Zustandssumme der dualen Darstellung im Strong Coupling Limit erhält man schließlich nach einer Grassmann-Integration an jedem Gitterpunkt  $x$ , wodurch die Gewichtungsfaktoren  $w_x$  eingeführt werden. Für Kogut-Susskind-Fermionen lauten diese (siehe [Rossi, Wolff; 1984])

$$\begin{aligned} w_x &= \int \prod_c [d\chi_c(x) d\bar{\chi}_c(x)] e^{2am_q \bar{\chi}_c(x)\chi_c(x)} (\bar{\chi}_c(x)\chi_c(x))^{k_x} \\ &= \frac{N_c!}{n_x!} (2am_q)^{n_x}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit der Anzahl der *Monomere*  $n_x = N_c - k_x$  und der Anzahl der *Dimer-Links*  $k_x = \sum_{\pm\hat{\nu}} k_{\pm\hat{\nu}}(x)$ , die durch die *Grassmann-Bedingung*

$$\sum_{\pm\hat{\nu}} k_{\pm\hat{\nu}}(x) + n_x = N_c \quad (3.5)$$

festgelegt werden. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass  $n_x \in \{0, \dots, N_c\}$  und dass keine Monomere an baryonischen Gitter-Seiten existieren können (siehe [Rossi, Wolff; 1984]). Die Parameter  $n_x$  und  $k_{\pm\hat{\nu}}(x)$  haben die folgende physikalische Bedeutung: So wird beispielsweise durch den Wert  $n_x = 1$  ein Quark-Monomer auf den Gitterpunkt  $x$  platziert, der Wert  $n_x = 2$  beschreibt dagegen zwei Monomere auf  $x$ . Analog wird durch den Wert  $k_{\hat{\nu}}(x) = 1$  ein *Forward-Hop*, sowie *Backward-Hop* eines Quarks auf dem Link  $b = (x, \nu)$  aktiviert und mit  $k_{\hat{\nu}}(x) = 2$  der Forward-/Backward-Hop zweier Monomere.

Die Zustandsfunktion in der dualen Darstellung ist in allen Ordnungen des Hopping-Parameters  $\kappa = \frac{1}{2am_q}$  gültig und lautet im Strong Coupling Limit ([Rossi, Wolff; 1984])

$$Z_{\text{SC}}^{\text{Stagg.}} = \sum_{\{k_b, n_x, l_B\}} \underbrace{\prod_{b=(x,\nu)} \frac{(N_c - k_b)!}{N_c! \cdot k_b!} \cdot \gamma^{2k_b \delta_{\nu 0}}}_{\text{Meson-Hops } M_x M_y} \cdot \underbrace{\prod_x \frac{N_c!}{n_x!}}_{\text{chirales Kondensat } M_x} \stackrel{= \kappa^{-n_x}}{(2am_q)^{n_x}} \cdot \underbrace{\prod_{l_B} w(l_B, \mu)}_{\text{Baryonen-Hops } \bar{B}_x B_y}, \quad (3.6)$$

wobei  $k_b, n_x \in \{0, \dots, N_c\}$  und  $l_B \in \{0, \pm 1\}$ . Der Gewichtungsfaktor  $w(l_B, \mu)$ , sowie das Vorzeichen  $\sigma(l_B) = \pm 1$  zur Beschreibung eines orientierten Loops  $l$  hängen hierbei von der Loop-Geometrie ab. Es besteht der folgende Zusammenhang zwischen der Vorzeichen-Funktion  $\sigma(l_B)$  und dem Gewichtungsfaktor  $w(l_B)$  (siehe [Rossi, Wolff; 1984] bzw. [Fromm; 2010]):

$$w(l_B) \propto \sigma(l_B) e^{r_{l_B} N_c N_\tau \mu}. \quad (3.7)$$

Der Faktor  $r_{l_B} = \pm 1$  beschreibt die Windungszahl der Baryonen-Loops in Zeitrichtung. Der **Anisotropie-Faktor** wird durch die Funktion  $\xi(\gamma) \equiv \gamma^2 = \frac{a}{a_\tau}$  definiert. Dieser wird benötigt, um die Temperatur kontinuierlich bei  $\beta = 0$  variieren zu können. Alternativ kann der Anisotropie-Faktor über das Verhältnis der Hopping-Parameter  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  dargestellt werden,

$$\kappa_\tau = \gamma \kappa_s \leftrightarrow \frac{1}{\gamma} = \kappa_\tau^{-1} \kappa_s, \quad (3.8)$$

und kann somit mit der Funktion  $k(\kappa_\tau) \propto \kappa_\tau^{-1}$  in Gl.(2.74) identifiziert werden.

Die Zustandssumme der dualen Darstellung, Gl.(3.6), weist zunächst einen gravierenden Unterschied zur Zustandssumme in Gl.(2.74) auf: In Gl.(3.6) treten im Chiralen-Kondensat-Anteil ausschließlich negative  $n_x$ -Potenzen des Hopping-Parameters

$$\kappa_\nu = \begin{cases} \kappa_\tau & \text{für } \nu = 0 \\ \kappa_s & \text{für } \nu > 0 \end{cases}$$

auf, die in der Single-Hop-Zustandssumme nicht vorliegen. Dieser Unterschied kann allerdings beseitigt werden, indem man den konstanten Term  $(2am_q)^{3N_s^3 N_\tau} = (2am_q)^{3\Omega}$  aus den Gitter-Produkten in Gl.(3.6) herausfaktoriert und für den späteren Vergleich vernachlässigt. Der Exponent in  $\kappa_\nu$  wird also positiv und Gl.(3.6) lautet für  $N_c = 3$ :

$$Z_{\text{SC}}^{\text{Stagg.}} \stackrel{N_c=3}{\propto} \underbrace{(2am_q)^{3\Omega}}_{\text{konstant}} \sum_{\{k_b, n_x, l_B\}} \prod_{b=(x,\nu)} \frac{(3 - k_b)!}{3! \cdot k_b!} \cdot \prod_x \frac{3!}{n_x!} \kappa_\nu^{3-n_x} \cdot \prod_{l_B} \sigma(l_B) e^{3r_{l_B} \mu N_\tau}. \quad (3.9)$$

Im folgenden Schritt werden die in Gl.(3.9) auftretenden Hopping-Parameter  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  separiert, wodurch die Zustandssumme in einen räumlichen und zeitlichen Anteil zerlegt

werden kann. Zusätzlich wird der Faktor  $N_c! = 3!$  mit dem konstanten Term  $(2am_q)^{3\Omega}$  zum Normalisierungsfaktor  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_0^{N_s^3} = ((2am_q)^{N_c} N_c!)^{N_\tau N_s^3}$  zusammengefasst. Aufgrund der Grassmann-Bedingung  $3 - n_x = \sum_{\pm\hat{\nu}} k_{\pm\hat{\nu}}(x)$  nimmt Gl.(3.9) die folgende Form an:

$$Z_{\text{SC}}^{\text{Stagg.}} = \underbrace{((2am_q)^3 3!)^\Omega}_{=\mathcal{N}=\mathcal{N}_0^{N_s^3}} \sum_{\{k_b, n_x, l_B\}} \left( \prod_{b=(x,i)} \frac{(3-k_b)!}{3! \cdot k_b!} \kappa_s^{2k_b} \right) \cdot \left( \prod_{x=(\vec{x},t)} \frac{1}{n_x!} \kappa_\tau^{2k(\vec{x},0)} \right) \cdot \prod_{l_B} \underbrace{\sigma(l_B)}_{=1} e^{3r_{l_B} \mu N_\tau}. \quad (3.10)$$

Der Strich über der Summe bedeutet hierbei, dass bei jeder Konfiguration  $\{k_b, n_x, l_B\}$  auf dem Gitter die Grassmann-Bedingung erfüllt wird. Der Faktor 2 in den Exponenten beider Hopping-Parameter resultiert aus der Backtracking-Eigenschaft der Kogut-Susskind-Fermionen in Raum- und Zeitrichtung. Für statische Baryonen, die in Zeitrichtung durch eine gerade, vertikale Linie beschrieben werden, wurde hierbei  $\sigma(l_B) = +1$  gesetzt (siehe [Fromm; 2010]).

Die Summe über alle Gitter-Konfigurationen in Gl.(3.10) kann zumindest im Static Limit mithilfe der Grassmann-Bedingung  $n_t + k_0(t) + k_0(t-1) = N_c = 3 \forall t$  analytisch bestimmt werden. So existieren z.B. auf einem  $N_\tau = 4$ -Gitter mit  $n_x = 0$  Monomeren insgesamt 4 Konfigurationen, die zeitlichen Dimer-Links auszurichten:

$$\begin{array}{c} \equiv \quad \equiv \\ = - = - \\ - = - = \\ \equiv \quad \equiv . \end{array}$$

Im Regelfall werden Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt, um die Zustandssumme in der dualen Darstellung zu ermitteln. Da in dieser Ausarbeitung allerdings keine numerischen Methoden verwendet werden, erscheint es sinnvoll, eine Zustandssumme als Vergleichspunkt zu wählen, die dieselben Koeffizienten - und damit dieselbe Anzahl an Monomer-Dimer-Konfigurationen - besitzt wie die duale Darstellung in Gl.(3.10).

Dazu wird zunächst das **Static Limit** der Zustandssumme aus [Demeterfi, Bilic; 1988] für  $N_c = 3$  betrachtet:

$$Z_{\text{static, Dem., Bilic}} = 2\cosh(3a\mu N_\tau) + \frac{\sinh[4N_\tau \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2\kappa_\tau}\right)]}{\sinh[N_\tau \operatorname{arsinh}\left(\frac{1}{2\kappa_\tau}\right)]}. \quad (3.11)$$

Der antisymmetrische  $\sinh$ -Teil von Gl.(3.11) entspricht hierbei einem normierten Polynom der Ordnung  $N_c N_\tau - M > 0$  im Hopping-Parameter  $\kappa_\tau$ , wobei  $M = 0, 2, 4, \dots$  die Anzahl der beteiligten Monomere je Gitter-Konfiguration beschreibt. Damit besitzt Gl.(3.11) die polynomielle Darstellung in  $\kappa_\tau$ :

$$Z_{\text{static, Dem., Bilic}}(\kappa_\tau) = \mathcal{N}_0 \left( \kappa_\tau^{N_c N_\tau} \cdot 2\cosh(3a\mu N_\tau) + \sum_{M=0}^{N_c N_\tau} c_{N_\tau}(M) \kappa_\tau^{N_c N_\tau - M} \right). \quad (3.12)$$

Die Koeffizienten  $c_{N_\tau}(M)$  sind generell  $N_\tau$ -abhängig, variieren durch die Anzahl der vorhandenen Monomere  $M$  und geben die Anzahl der Konfigurationsmöglichkeiten an,  $M$  Monomere auf einem anti-periodischen Gitter der Länge  $N_\tau$  zu positionieren. Wie bereits erläutert, stimmen diese Koeffizienten im Static Limit mit denen der dualen Darstellung aus Gl.(3.10) überein. So erhält man z.B. für  $N_\tau = 2$  mit *Mathematica* den folgenden Ausdruck für das Polynom in Gl.(3.12):

$$Z_{\text{static, Dem., Bilic}}(\kappa_\tau, N_\tau = 2) = \kappa_\tau^6 \cdot 2 \cosh(3a\mu N_\tau) + 4\kappa_\tau^6 + 10\kappa_\tau^4 + 6\kappa_\tau^2 + 1. \quad (3.13)$$

Die darin auftretenden Koeffizienten  $c_{N_\tau=2}(M) = 4, 10, 6$  und  $1$  können ebenfalls über die duale Darstellung hergeleitet werden und sind in Tab. 1 aufgelistet.

Anzahl Monomere $M$	$c_{N_\tau=2}(M)$ : Anzahl der Konfigurationen mit $M$ Monomeren für beliebige $N_c$	$c_{N_\tau=2}(M)$ für $N_c = 3$
0	$2 \frac{(N_c-3)!}{N_c! \cdot 3!} \cdot \frac{N_c!}{0!} \cdot \frac{N_c!}{N_c! \cdot 0!} \cdot \frac{N_c!}{0!} +$ $2 \frac{(N_c-1)!}{N_c! \cdot 1!} \cdot \frac{(N_c-2)!}{N_c! \cdot 2!} \cdot \frac{N_c!}{0!} \cdot \frac{N_c!}{0!}$	4
2	$\frac{(N_c-1)!}{N_c! \cdot 1!} \cdot \frac{N_c!}{1!} \cdot \frac{(N_c-1)!}{N_c! \cdot 1!} \cdot \frac{N_c!}{1!} + 2 \cdot$ $\frac{(N_c-2)!}{N_c! \cdot 2!} \cdot \frac{N_c!}{1!} \cdot \frac{(N_c-0)!}{N_c! \cdot 0!} \cdot \frac{N_c!}{1!}$ $= ((N_c - 1)!)^2 + 2 \cdot \frac{(N_c-2)! N_c!}{2!}$	$4 + 2 \cdot 3 = 10$
4	$2 \cdot \frac{(N_c-1)!}{N_c! \cdot 1!} \cdot \frac{N_c!}{2!} \cdot \frac{(N_c-0)!}{N_c! \cdot 0!} \cdot \frac{N_c!}{2!}$	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 = 6$
6	$\frac{(N_c-0)!}{N_c! \cdot 0!} \cdot \frac{N_c!}{3!} \cdot \frac{(N_c-0)!}{N_c! \cdot 0!} \cdot \frac{N_c!}{3!}$	1

**Tab. 1:** In dieser Tabelle sind die Anzahlen der möglichen Konfigurationen mit  $M = 0, 2, \dots, N_c N_\tau = 6$  Monomeren auf einem Gitter der Länge  $N_\tau = 2$  für beliebige Farbfreiheitsgrade  $N_c$  und für  $N_c = 3$  aufgelistet, die über die duale Darstellung hergeleitet wurden. Diese Konfigurationszahlen stimmen exakt mit den Koeffizienten des Polynoms in Gl.(3.13) überein - auch für größere  $N_\tau$ -Werte.

Nun erfolgt ein Vergleich der Static-Limit-Zustandssumme aus [Demeterfi, Bilic; 1988] (siehe Gl.(3.11)) und dem entsprechenden Resultat aus [Bloch, Bruckmann; 2013] (siehe Gl.(2.30)). In Kapitel 2.3.1 konnte nämlich bereits die statische Quark-Determinante der Hopping-Parameter-Entwicklung mit der Static-Limit-Zustandssumme aus [Bloch, Bruckmann; 2013] für  $N_\tau = 2, 4, 6$  und für höhere  $N_\tau$  identifiziert werden (siehe Gl.(2.27)). Gl.(2.30) lautet

$$Z_{\text{static, Bruckmann}} = 2 \cosh(3a\mu N_\tau) + A^3 - 2A, \quad (3.14)$$

wobei  $A = 2 \cosh(N_\tau \operatorname{arsinh}(\frac{1}{2\kappa_\tau}))$  gilt. Diese Zustandssumme stimmt - bis auf den Faktor  $\kappa_\tau^{3N_\tau}$ , der analog zur dualen Darstellung vernachlässigt werden kann - mit der über die Hopping-Parameter-Entwicklung ermittelten Zustandssumme im Static Limit (siehe Gl.(2.28)) und auch mit der Zustandssumme in Gl.(3.11) überein. Das liegt darin begründet, dass der Ausdruck  $A^3 - 2A$  dieselbe polynomielle Darstellung wie Gl.(3.12) besitzt. Mit *Mathematica* kann die Äquivalenz der antisymmetrischen Terme  $A^3 - 2A$  und

$\frac{\sinh[4N_\tau \operatorname{arsinh}(\frac{1}{2\kappa_\tau})]}{\sinh[N_\tau \operatorname{arsinh}(\frac{1}{2\kappa_\tau})]}$  für alle  $N_\tau$ -Werte nachgewiesen werden. So erhält man mit Gl.(2.26) für  $N_\tau = 2$  das bekannte Resultat

$$A^3 - 2A = \kappa_\tau^{-6}(4\kappa_\tau^6 + 10\kappa_\tau^4 + 6\kappa_\tau^2 + 1), \quad (3.15)$$

welches dem Polynom in Gl.(3.13) entspricht. Für  $N_\tau = 4, 6$  und folglich auch für höhere  $N_\tau$  stimmen die antisymmetrischen Terme beider Zustandssummen exakt überein (siehe Kapitel 2.3.1).

Im **Static Limit** weisen also die Zustandssummen der dualen Darstellung, sowie die Zustandssummen aus [Demeterfi, Bilic; 1988] und [Bloch, Bruckmann; 2013] und der Hopping-Parameter-Entwicklung identische Koeffizienten auf, die die Anzahl der möglichen Monomer-Konfigurationen beschreiben.

Nun wird die  $\kappa_s^2$ -Korrektur in der Zustandssumme aus Gl.(3.10) berücksichtigt. Mithilfe eines numerischen Auswertungsprogramms konnte die  $\kappa_s^2$ -Korrektur der dualen Darstellung für ein  $(N_\tau = 2) \times (N_\tau = 2)$ -Gitter ermittelt werden. Das Resultat enthält keine baryonischen Anteile und lautet:

$$Z_{2 \times 2}(\kappa_s, \kappa_\tau) = \kappa_s^2 \cdot z_0^{N_s^3 - 2} \left[ \frac{400}{3} \kappa_\tau^8 + 320 \kappa_\tau^6 + 272 \kappa_\tau^4 + 96 \kappa_\tau^2 + 12 \kappa_\tau^0 \right]. \quad (3.16)$$

Nun erfolgt der Vergleich beider Zustandssummen. Dazu wird die in Kapitel 2 hergeleitete Single-Hop-Zustandssumme (Gl.(2.74)) für  $d = 3$  verwendet. Die darin auftretende Funktion  $k(\kappa_\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\kappa_\tau)^2}}$  resultierte aus dem mesonischen Anteil des Quark-Propagators (siehe Gl.(2.48)). Zudem stellt  $k(\kappa_\tau)$  eine Ordnungsfunktion in  $\kappa_\tau^{-1}$  dar,

$$k(\kappa_\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\kappa_\tau)^2}} \propto \mathcal{O}(\kappa_\tau^{-1}) \rightarrow k^2(\kappa_\tau) \propto \mathcal{O}(\kappa_\tau^{-2}), \quad (3.17)$$

und kann somit mit dem **Anisotropie-Faktor**  $\gamma$  in Gl.(3.6) assoziiert werden, der die Meson-Hops beschreibt.

Um die  $\kappa_s^2$ -Korrekturen beider Zustandssummen vergleichen zu können, wird  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  für den Fall  $N_\tau = 2$  betrachtet. Zusätzlich wurden die  $\kappa_\tau$ -abhängigen Funktionen  $A_1^3$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_\tau^8)$  und  $k(\kappa_\tau)$  in führender Ordnung mit *Mathematica* entwickelt. Mit  $z_0^{N_s^3 - 1} = z_0 \cdot z_0^{N_s^3 - 2}$  erhält man - unter Vernachlässigung der baryonischen Anteile - folgendes Polynom in  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}(N_\tau = 2, \kappa_s, \kappa_\tau) = & z_0^{N_s^3} + 6N_s^3 \kappa_s^2 z_0^{N_s^3 - 2} \left[ 12 + 96\kappa_\tau^2 + 276\kappa_\tau^4 + 432\kappa_\tau^6 \right. \\ & \left. + \frac{116}{3} \kappa_\tau^8 + \mathcal{O}(\kappa_\tau^{10}) + \text{baryonische Anteile} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Der  $\kappa_s^2$ -Anteil der Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  stimmt zum größten Teil mit dem Resultat in Gl.(3.16) überein. So können unter anderem alle Koeffizienten bis zur Ordnung  $\kappa_\tau^4$  reproduziert werden. Die Koeffizienten der höheren  $\kappa_\tau$ -Ordnungen unterscheiden sich dagegen von den Ergebnissen in Gl.(3.16). Diese Abweichungen können eventuell auf mögliche analytische Rechenfehler bei der Herleitung von  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  zurückgeführt werden.

### 3.2. Die Single-Hop-Zustandssumme $\mathcal{Z}_2$ für $N_f = 1$ -Flavor Wilson-Fermionen

In Kapitel 2 wurde bereits die Single-Hop-Zustandssumme für Kogut-Susskind-Fermionen über eine räumliche Hopping-Parameter-Entwicklung bis zur Ordnung  $\kappa_s^2$  hergeleitet. Die darin aufgeführten Rechenschritte und relevanten Größen - wie z.B. die statische Quark-Determinante oder der Quark-Propagator - wurden hierbei sowohl für Kogut-Susskind-, als auch für Wilson-Fermionen zum Teil gegenüber gestellt. Eine detaillierte Herleitung dieser Größen für Wilson-Fermionen kann u.a. in [Glesaaen; 2016] eingesehen werden und wird in diesem Abschnitt nicht näher erläutert.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}}$  ist die **statische Quark-Determinante** für Wilson-Fermionen, die im Gegensatz zum Kogut-Susskind-Fermion-Fall einen quadratischen Exponenten aufweist (siehe Gl.(2.17) bzw. [Glesaaen; 2016]). Die Kopplungs-Parameter  $h_1(\mu) = (2\kappa_\tau e^{a\mu})^{N_\tau} = \bar{h}_1(-\mu)$  sind dabei Funktionen des Hopping-Parameters  $\kappa_\tau = \frac{1}{2am_q+8}$ . Der Parameter  $h_1$  stellt die effektive Kopplungskonstante in führender Ordnung dar (siehe [Glesaaen; 2016]) und beschreibt die Quark-Beiträge in der Zustandssumme.

In Kapitel 2 wurde bereits erläutert, dass die Quark-Determinante in einen statischen und kinetischen Anteil faktorisiert werden kann,

$$\det(Q) = \det(Q_{\text{stat}}) \cdot \det(Q_{\text{kin}}). \quad (3.19)$$

Daraus ergibt sich der niedrigste Ordnungsterm der Zustandssumme im Hopping-Parameter  $\kappa_s$  (siehe Gl.(2.59)). Der einzige nicht-verschwindende Beitrag ist das Integral über den Faktor  $PM$ . Das zu lösende Integral lautet somit

$$\begin{aligned} I^{\text{Wilson}}[PM] &= \int [dU]_i \text{tr}(PM) \\ &= \kappa_s^2 \int [dU]_i \sum_{\vec{x}, j} \text{tr}_{sct} \left( Q_{\text{stat}}^{-1}(\vec{x})(1 + \gamma_j)U_j(\vec{x}, t_1)Q_{\text{stat}}^{-1}(\vec{x} + \hat{j})(1 - \gamma_j)U_j^\dagger(\vec{x}, t_2) \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei  $\gamma_i$  die räumlichen Gamma-Matrizen sind. Der **Quark-Propagator**  $Q_{\text{stat}}^{-1}$  lautet für Wilson-Fermionen:

$$(Q_{\text{stat}}^{-1})_{t_y, t_x} = \delta_{t_y, t_x} + \frac{1 + \gamma_0}{2} B_{t_y, t_x}^+ + \frac{1 - \gamma_0}{2} B_{t_y, t_x}^-. \quad (3.21)$$

Die Operatoren  $B_{t_y, t_x}^\pm$  wurden bereits in Kapitel 2 vorgestellt und beschreiben die Propagation der Baryonen in Zeitrichtung.

Man beachte hierbei, dass in Gl.(3.20) zusätzlich eine Spur-Operation über alle Spins auftritt. Die Spin-Indizes weisen keinen Zusammenhang zu der Gruppen-Integration auf, sodass die Spur  $\text{tr}_s$  direkt berechnet werden kann. Setzt man den Ausdruck für den Quark-Propagator (Gl.(3.21)) ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \text{tr}_s \left( \left( 1 + \frac{1 + \gamma_0}{2} B_{\vec{x}}^+ + \frac{1 - \gamma_0}{2} B_{\vec{x}}^- \right) (1 + \gamma_j) \left( 1 + \frac{1 + \gamma_0}{2} B_{\vec{x} + \hat{j}}^+ + \frac{1 - \gamma_0}{2} B_{\vec{x} + \hat{j}}^- \right) (1 - \gamma_j) \right) \\ = 2(B_{\vec{x}}^+ - B_{\vec{x}}^-)(B_{\vec{x} + \hat{j}}^+ - B_{\vec{x} + \hat{j}}^-). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aufgrund der Spur  $\text{tr}_s$  entsteht zusätzlich ein Faktor 2, der bei Kogut-Susskind-Fermionen nicht auftritt. Dieser Ausdruck kann schließlich in Gl.(3.20) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} I^{\text{Wilson}}[PM] &= 2\kappa_s^2 \int [dU]_i \sum_{\vec{x},j} \text{tr}_{ct}((B_{\vec{x}}^+ - B_{\vec{x}}^-)U_j(\vec{x}, t_1)(B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ - B_{\vec{x}+\hat{j}}^-)U_j^\dagger(\vec{x}, t_2)) \\ &= 2\kappa_s^2 \text{tr}_t \sum_{\vec{x},j} (B_{\vec{x}}^+ - B_{\vec{x}}^-)_{ab} (B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ - B_{\vec{x}+\hat{j}}^-)_{cd} \delta_{t_1,t_2} \int dU U_{bc} U_{da}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Benutzt man das bekannte Gruppen-Integral,  $\int dU U_{bc} U_{da}^\dagger = \frac{1}{N_c} \delta_{ab} \delta_{cd}$ , und führt die Spur  $\text{tr}_t$  aus, erhält man schließlich die  $\kappa_s^2$ -Korrektur der Zustandssumme für Wilson-Fermionen:

$$\begin{aligned} I^{\text{Wilson}}[PM] &= \frac{2\kappa_s^2}{N_c} \sum_{t_1,t_2} \sum_{\vec{x},j} \text{tr}_c(B_{\vec{x}}^+ - B_{\vec{x}}^-)_{t_1 t_2} \text{tr}_c(B_{\vec{x}+\hat{j}}^+ - B_{\vec{x}+\hat{j}}^-)_{t_2 t_1} \delta_{t_1,t_2} \\ &= 2 \overbrace{\frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}}^{=h_2} \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} \text{tr}_c \left( \frac{h_1 W(\vec{x})}{1 + h_1 W(\vec{x})} - \frac{\bar{h}_1 W^\dagger(\vec{x})}{1 + \bar{h}_1 W^\dagger(\vec{x})} \right) \cdot \text{tr}_c \left( \frac{h_1 W(\vec{y})}{1 + h_1 W(\vec{y})} - \frac{\bar{h}_1 W^\dagger(\vec{y})}{1 + \bar{h}_1 W^\dagger(\vec{y})} \right) \\ &\stackrel{\text{Def. } W_{11}}{=} 2h_2 \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} (W_{11}(\vec{x}) - \bar{W}_{11}(\vec{x})) (W_{11}(\vec{y}) - \bar{W}_{11}(\vec{y})). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Die Summe über den Zeit-Index liefert erneut einen Faktor  $N_\tau$ . Da keine Farb-Index-Mischung an verschiedenen Gitterpunkten eintritt, beschreibt die niedrigste Ordnung der räumlichen Hopping-Parameter-Entwicklung eine Nächste-Nachbar-Wechselwirkung zwischen Polyakov-Loop-abhängigen Objekten, die durch die bereits eingeführten **Knoten-Funktionen**  $W_{11}$  und  $\bar{W}_{11}$  ausgedrückt werden können.

Der niedrigste Ordnungsterm  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$  der effektiven Wirkung lautet somit:

$$e^{-S_{\text{eff}}} = 1 - 2h_2 \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} (W_{11}(\vec{x}) - \bar{W}_{11}(\vec{x})) (W_{11}(\vec{y}) - \bar{W}_{11}(\vec{y})) + \mathcal{O}(u, \kappa_s^4). \quad (3.25)$$

Daraus ergibt sich die Single-Hop-Zustandssumme für 1-Flavor Wilson-Fermionen:

$$\mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}} = \int [dW] \det(Q_{\text{stat}}) \left( 1 - 2h_2 \sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle} [W_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y}) + \bar{W}_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y}) - 2W_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y})] \right). \quad (3.26)$$

Bereits an dieser Stelle sind deutliche Unterschiede zwischen Gl.(3.26) und der Single-Hop-Zustandssumme für Kogut-Susskind-Fermionen feststellbar: Da der statische Quark-Propagator für Kogut-Susskind-Fermionen den  $\kappa_\tau$ -abhängigen Term  $k(\kappa_\tau) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\kappa_\tau)^2}}$  enthält, entstehen in der  $\mathcal{Z}_2^{\text{Stagg.}}$ -Zustandssumme Kopplungsterme bestehend aus statischer Quark-Determinante und einzelnen Knoten-Funktionen, die mit  $k(\kappa_\tau)$  gewichtet sind. In Gl.(3.26) treten dagegen Kopplungen zwischen statischer Determinante und Paaren der

Knoten-Funktionen auf. Neben der abweichenden Anzahl beitragender Terme in beiden Zustandssummen besteht ein weiterer zentraler Unterschied darin, dass die mesonischen Anteile der  $\mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}}$ -Zustandssumme - ausgedrückt durch den  $W_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y})$ -Term bzw. durch Terme der Form  $\bar{h}_1^n h_1^n$ ,  $n \geq 2$  - aufgrund des Spins subtrahiert werden.

Um diesen Abschnitt abzuschließen, wird die Single-Hop-Zustandssumme für Wilson-Fermionen angegeben. Daraufhin wird dieses Resultat mit der Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{Stagg.}}$  für den Fall  $N_\tau = 2$  verglichen. Die Ermittlung der in Gl.(3.26) auftretenden Polyakov-Loop-Integrale erfolgt dabei analog zur Herleitung der  $\mathcal{Z}_2^{\text{Stagg.}}$ -Zustandssumme in Kapitel 2 und wird hier nicht näher diskutiert (siehe [Glesaaen; 2016]).

Ausgehend von der statischen Quark-Determinante für Wilson-Fermionen, siehe Gl.(2.17), erhält man mit den Integrationsregeln für  $SU(3)$ -Polyakov-Loop-Integrale (siehe Appendix (A.2.3)) die **Single-Hop-Zustandssumme für Wilson-Fermionen im Strong Coupling Limit**:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}} = z_{0, \text{Wilson}}^{N_s^3} - 12h_2 N_s^3 z_{0, \text{Wilson}}^{N_s^3-1} [4h_1^3 + 9h_1^6 + 4\bar{h}_1^3 + 9\bar{h}_1^6 + 4\bar{h}_1 h_1^4 + 8\bar{h}_1^4 h_1 - 10\bar{h}_1^2 h_1^2 \\ + 4\bar{h}_1^2 h_1^5 + 32\bar{h}_1^5 h_1^2 - 87\bar{h}_1^3 h_1^3 + 4\bar{h}_1^3 h_1^6 + 4\bar{h}_1^6 h_1^3 - 10\bar{h}_1^4 h_1^4 - 2\bar{h}_1^5 h_1^5]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die in Gl.(3.26) auftretende Summe über alle nächste Nachbarn  $\sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$  liefert einen Faktor  $6N_s^3$  (siehe Kapitel 2).

Für den Fall  $N_\tau = 2$  sieht diese Zustandssumme folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}}(N_\tau = 2) = z_{0, \text{Wilson}}^{N_s^3} - 6N_s^3 \kappa_s^2 z_{0, \text{Wilson}}^{N_s^3-2} \left[ -\frac{40}{3}(2\kappa_\tau)^8 - \frac{380}{3}(2\kappa_\tau)^{12} - \frac{1448}{3}(2\kappa_\tau)^{16} \right. \\ \left. - \frac{3392}{3}(2\kappa_\tau)^{20} - 2104(2\kappa_\tau)^{24} - \frac{3272}{3} \cdot (2\kappa_\tau)^{28} - 408 \cdot (2\kappa_\tau)^{32} \right. \\ \left. - \frac{460}{3} \cdot (2\kappa_\tau)^{36} - 24 \cdot (2\kappa_\tau)^{40} - \frac{8}{3} \cdot (2\kappa_\tau)^{44} + \text{baryonische Anteile} \right]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Da die Static-Loop-Gewichtungsfaktoren  $\bar{h}_1, h_1$  einen Faktor 2 enthalten, weist diese Zustandssumme äußerst große Koeffizienten auf. Zudem ist der Term niedrigster Ordnung von der Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_\tau^8)$ , dessen Koeffizient  $-\frac{40}{3}$  lautet. Dieser Koeffizient ist um einen Faktor 10 kleiner als der Koeffizient  $\frac{400}{3}$  im Resultat für Kogut-Susskind-Fermionen in Gl.(3.16).

Somit können keine Gemeinsamkeiten zwischen den beiden trunkierten Zustandssummen  $\mathcal{Z}_2^{\text{Stagg.}}$  und  $\mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}}$  festgestellt werden.

Für Wilson-Fermionen kann diese Zustandsfunktion auf ein sogenanntes *Vertex-Modell* abgebildet werden. Dies wurde bereits für das *Schwinger-Modell* durchgeführt, welches auf ein *7-Vertex-Modell* für  $N_f = 1$  (siehe [Salmhofer; 1991]) und auf ein modifiziertes *3-Zustand-20-Vertex-Modell* für  $N_f = 2$  Flavor abgebildet worden ist (siehe [Scharnhorst; 1996]).

### 3.3. Observablen

In diesem Abschnitt erfolgt die Auswertung zweier Observablen, die für die Untersuchung von Phasenübergängen relevant sind - das **chirale Kondensat**  $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$  und der **Polyakov-Loop-Erwartungswert**  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$ . Beide Ordnungsparameter werden für den Fall  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$ , also auf einem  $2 \times 2$ -hyperkubischem Gitter, betrachtet.

Ausgangspunkt für die Berechnung dieser beiden Größen ist die in Kapitel 2 hergeleitete Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  für  $N_f = 1$  Flavor (siehe Gl.(2.74)).

#### 3.3.1. Das chirale Kondensat

Zunächst wird das chirale Kondensat ermittelt. Diese Observable wird auf dem Gitter folgendermaßen definiert (siehe [Karsch, Mütter; 1984], [Rossi, Wolff; 1984]):

$$\langle \bar{\chi}\chi \rangle = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial m_q} \log \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}. \quad (3.29)$$

Hierbei ist  $\Omega = N_\tau N_s^3$  das totale Gitter-Volumen und  $m_q$  die Quark-Masse.

Da die Berechnung im Strong Coupling Limit erfolgt (das bedeutet  $\beta = 0$ ), ist die Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  durch die beiden Kopplungsparameter  $h_1 = (\kappa_\tau e^{a\mu})^{N_\tau} = \bar{h}_1(-\mu)$  und  $h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}$  bzw. durch die Hopping-Parameter  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  gegeben. Wird der im Kopplungsparameter  $h_1$  auftretende *Fugazitätsfaktor*  $z \equiv e^{+a\mu}$  bei der Differentiation konstant gehalten, so erhält man (der Faktor  $A_1^3$  in  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  wird vernachlässigt):

$$\begin{aligned} \langle \bar{\chi}\chi \rangle &= \frac{1}{\Omega} \frac{\partial}{\partial m_q} \log \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} \Big|_{z=e^{+a\mu}} = \frac{1}{\Omega} \frac{\partial \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}}{\partial m_q} \Big|_z \cdot \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \\ &\stackrel{\text{Kettenregel}}{=} \frac{1}{\Omega} \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \left( \frac{\partial \kappa_s}{\partial m_q} \frac{\partial h_2}{\partial \kappa_s} \frac{\partial}{\partial h_2} \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} \Big|_z + \frac{\partial \kappa_\tau}{\partial m_q} \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} \Big|_z \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Zunächst wird die Zustandssumme nach  $h_2$  bzw.  $\kappa_s$  differenziert. Es gilt

$$h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c} \rightarrow \frac{\partial h_2}{\partial \kappa_s} = \frac{2N_\tau}{N_c} \kappa_s, \quad (3.31)$$

sowie

$$\frac{\partial \kappa_s}{\partial m_q} = \frac{\partial}{\partial m_q} \left( \frac{1}{2am_q} \right) = -\frac{1}{2a} \frac{1}{m_q^2} = -\frac{\kappa_s}{m_q}. \quad (3.32)$$

Die Differentiation von  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  nach dem Kopplungsparameter  $h_2$  ergibt

$$\frac{\partial}{\partial h_2} \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} \Big|_{z=e^{a\mu}} = +6k^2(\kappa_\tau) N_c^2 N_s^3 z_0^{N_s^3} + 12N_s^3 k(\kappa_\tau) N_c z_0^{N_s^3-1} z_1 + 6N_s^3 z_0^{N_s^3-2} z_2, \quad (3.33)$$

wobei  $z_1, z_2$  eine gewählte Kurznotation für die  $\kappa_\tau$ -abhängigen Terme

$$z_1 \equiv 3\bar{h}_1^3 + 3\bar{h}_1^3 + 2\bar{h}_1 h_1 + 4\bar{h}_1^2 h_1^2 + 6\bar{h}_1^3 h_1^3, \quad (3.34)$$

$$z_2 \equiv 34\bar{h}_1^3 h_1^3 + 12\bar{h}_1 h_1^4 + 12\bar{h}_1^4 h_1 + 24\bar{h}_1^2 h_1^5 + 24\bar{h}_1^5 h_1^2 + 36\bar{h}_1^3 h_1^6 + 36\bar{h}_1^6 h_1^3 \\ + 4\bar{h}_1^2 h_1^2 + 40\bar{h}_1^4 h_1^4 + 48\bar{h}_1^5 h_1^5 + 36\bar{h}_1^6 h_1^6 + 9h_1^6 + 9\bar{h}_1^6 \quad (3.35)$$

darstellt.

Daraus ergibt sich für den ersten Summanden in Gl.(3.30):

$$\frac{1}{\Omega} \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \frac{\partial \kappa_s}{\partial m_q} \frac{\partial h_2}{\partial \kappa_s} \frac{\partial}{\partial h_2} \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} \Big|_z = -\frac{1}{\Omega} \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \frac{2}{m_q} \cdot \underbrace{\frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}}_{=h_2} \left[ +6k^2(\kappa_\tau) N_c^2 N_s^3 z_0^{N_s^3} \right. \\ \left. + 12N_s^3 k(\kappa_\tau) N_c z_0^{N_s^3-1} z_1 + 6N_s^3 z_0^{N_s^3-2} z_2 \right] \quad (3.36) \\ \stackrel{\text{Def. } \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}}{=} -\frac{1}{\Omega} \frac{1}{m_q} \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \left[ 2\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} - 2z_0^{N_s^3} \right].$$

Abschließend erfolgt die Berechnung der  $\kappa_\tau$ -Ableitung des zweiten Terms in Gl.(3.30). Dazu werden die in  $z_0, z_1$  und  $z_2$  auftretenden  $\bar{h}_1^m h_1^n$ -Terme ( $n, m \geq 1$ ) durch  $\kappa_\tau$  ausgedrückt, sowie der Faktor  $k(\kappa_\tau)$  differenziert. Leitet man zunächst die Quark-Antiquark-Paar-Terme  $\bar{h}_1^m h_1^n$  ab, so erhält man allgemein:

$$\bar{h}_1^m h_1^n = (\kappa_\tau e^{-a\mu})^{mN_\tau} \cdot (\kappa_\tau e^{+a\mu})^{nN_\tau} = \kappa_\tau^{(m+n)N_\tau} \cdot e^{+a\mu(n-m)N_\tau} \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} \bar{h}_1^m h_1^n \Big|_{z=e^{+a\mu}} = e^{+a\mu(n-m)N_\tau} \cdot (m+n)N_\tau \kappa_\tau^{(m+n)N_\tau-1} = \frac{(m+n)N_\tau}{\kappa_\tau} \bar{h}_1^m h_1^n.$$

Diese Identität kann verwendet werden, um die Ableitungen der  $z_i$ -Terme ( $i = 0, 1, 2$ ) zu ermitteln. Man erhält

$$\frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} z_0^{N_s^3} \Big|_{z=e^{+a\mu}} = N_s^3 \cdot z_0^{N_s^3-1} \frac{1}{\kappa_\tau} \cdot [3N_\tau \bar{h}_1^3 + 3N_\tau h_1^3 + 2N_\tau \bar{h}_1 h_1 + 4N_\tau \bar{h}_1^2 h_1^2 + 6N_\tau \bar{h}_1^3 h_1^3] \\ = \underbrace{N_s^3 N_\tau}_{=\Omega} \cdot z_0^{N_s^3-1} \frac{1}{\kappa_\tau} \cdot \underbrace{[3\bar{h}_1^3 + 3h_1^3 + 2\bar{h}_1 h_1 + 4\bar{h}_1^2 h_1^2 + 6\bar{h}_1^3 h_1^3]}_{\equiv z_1} \quad (3.37) \\ = \frac{\Omega}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-1} \cdot z_1,$$

sowie

$$z_1' \equiv \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} z_1 \Big|_{z=e^{+a\mu}} = \frac{N_\tau}{\kappa_\tau} [9\bar{h}_1^3 + 9h_1^3 + 4\bar{h}_1 h_1 + 16\bar{h}_1^2 h_1^2 + 36\bar{h}_1^3 h_1^3] \quad (3.38) \\ z_2' \equiv \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} z_2 \Big|_{z=e^{+a\mu}} = \frac{N_\tau}{\kappa_\tau} [204\bar{h}_1^3 h_1^3 + 60\bar{h}_1 h_1^4 + 60\bar{h}_1^4 h_1 + 168\bar{h}_1^2 h_1^5 + 168\bar{h}_1^5 h_1^2 \\ + 324\bar{h}_1^3 h_1^6 + 324\bar{h}_1^6 h_1^3 + 16\bar{h}_1^2 h_1^2 + 320\bar{h}_1^4 h_1^4 + 480\bar{h}_1^5 h_1^5 + 432\bar{h}_1^6 h_1^6 + 54h_1^6 + 54\bar{h}_1^6].$$

Man benötigt noch die Ableitungen der Funktionen  $k(\kappa_\tau)$  und  $k^2(\kappa_\tau)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} k(\kappa_\tau) &= \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} (1 + (2\kappa_\tau)^2)^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 + (2\kappa_\tau)^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (+8\kappa_\tau) = -4\kappa_\tau \cdot k^3(\kappa_\tau), \\ \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} k^2(\kappa_\tau) &= \frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} (1 + (2\kappa_\tau)^2)^{-1} = (-1) \cdot (1 + (2\kappa_\tau)^2)^{-2} \cdot (+8\kappa_\tau) = -8\kappa_\tau \cdot k^4(\kappa_\tau).\end{aligned}$$

Damit liegen alle relevanten Komponenten zur Ermittlung der  $\kappa_\tau$ -Ableitung von  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  vor. Unter Benutzung der Produkt-Regel erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \kappa_\tau} \mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}} \Big|_{z=e^{a\mu}} &= \frac{\Omega}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-1} \cdot z_1 + 6N_c \Omega \kappa_s^2 \left[ -8\kappa_\tau \cdot k^4(\kappa_\tau) z_0^{N_s^3} + k^2(\kappa_\tau) \frac{\Omega}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-1} \cdot z_1 \right] \\ &+ 12\Omega \kappa_s^2 \left[ -4\kappa_\tau \cdot k^3(\kappa_\tau) z_0^{N_s^3-1} \cdot z_1 + k(\kappa_\tau) \cdot \frac{(\Omega - N_\tau)}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-2} \cdot z_1^2 + k(\kappa_\tau) z_0^{N_s^3-1} \cdot z_1' \right] \\ &+ 6\Omega \frac{1}{N_c} \kappa_s^2 \left[ z_0^{N_s^3-2} \cdot z_2' + \frac{(\Omega - 2N_\tau)}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-3} \cdot z_2^2 \right].\end{aligned}\quad (3.39)$$

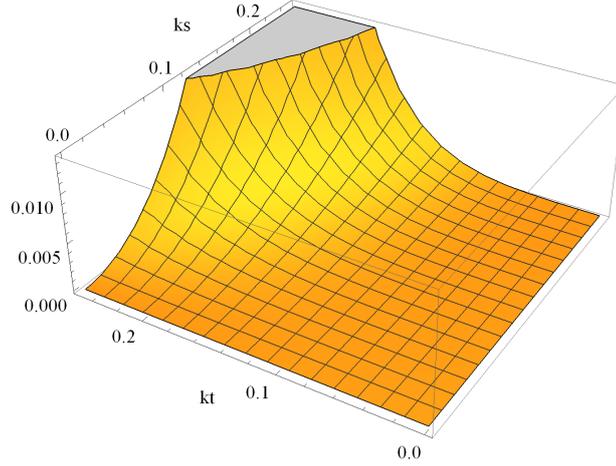
Differenziert man schließlich  $\kappa_\tau$  nach der Quark-Masse,

$$\frac{\partial \kappa_\tau}{\partial m_q} = \frac{\partial}{\partial m_q} \left( \frac{1}{2am_q} \right) = -\frac{1}{2a} \frac{1}{m_q^2} = -\frac{\kappa_\tau}{m_q},\quad (3.40)$$

setzt die Resultate aus Gl.(3.36), Gl.(3.39) und  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  in Gl.(3.30) ein, wird der Faktor  $\Omega$  heraus gekürzt und die Zustandssumme im Static-Limit,  $z_0^{N_s^3}$ , eliminiert. Dadurch erhält man den folgenden Ausdruck für das chirale Kondensat im  $N_f = 1$ -Flavor-Fall:

$$\begin{aligned}\langle \bar{\chi} \chi \rangle &= -\frac{1}{m_q} \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \left[ 12N_c k^2(\kappa_\tau) \kappa_s^2 z_0^{N_s^3} + 24k(\kappa_\tau) \kappa_s^2 z_0^{N_s^3-1} z_1 + 12 \frac{1}{N_c} \kappa_s^2 z_0^{N_s^3-2} z_2 + z_0^{N_s^3-1} z_1 \right. \\ &+ 6N_c \kappa_s^2 \kappa_\tau \left[ -8\kappa_\tau k^4(\kappa_\tau) z_0^{N_s^3} + k^2(\kappa_\tau) \frac{\Omega}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-1} z_1 \right] \\ &+ 12\kappa_s^2 \kappa_\tau \left[ -4\kappa_\tau k^3(\kappa_\tau) z_0^{N_s^3-1} z_1 + k(\kappa_\tau) \frac{(\Omega - N_\tau)}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-2} z_1^2 + k(\kappa_\tau) z_0^{N_s^3-1} z_1' \right] \\ &\left. + 6 \frac{1}{N_c} \kappa_s^2 \kappa_\tau \left[ z_0^{N_s^3-2} z_2' + \frac{(\Omega - 2N_\tau)}{\kappa_\tau} z_0^{N_s^3-3} z_2^2 \right] \right].\end{aligned}\quad (3.41)$$

Das chirale Kondensat stellt also eine gebrochen-rationale Funktion dar, wobei die Zähler- und Nenner-Funktion (hier:  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$ ) Polynome in  $\kappa_s^2$  und  $\kappa_\tau$  sind. Mithilfe von *Mathematica* konnte das chirale Kondensat exemplarisch für ein hyperkubisches Gitter mit  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$  berechnet werden. Die Zähler-Funktion und  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  wurden hierbei jeweils bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{24})$  für  $\mu = 0$  in der  $U(3)$ -Eichtheorie (d.h. ohne baryonische Anteile) und bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{120})$  für  $\mu = 1$  in der  $SU(3)$ -Eichtheorie (d.h. mit baryonischen Anteilen) betrachtet (siehe Abb. 2 und Abb. 3). Zudem wurde  $k(\kappa_\tau)$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_\tau^{12})$  entwickelt und  $\Omega = N_\tau N_s^3 = 16$  genutzt. Das chirale Kondensat  $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$  kann somit als Funktion in  $\kappa_s$  und  $\kappa_\tau$  dargestellt werden. In dem drei-dimensionalen Plot in Abb. 2 kann das chirale Kondensat für  $\mu = 0$  eingesehen werden. In der  $U(3)$ -Theorie



**Abb. 2:** In diesem 3D-Plot wird das chirale Kondensat  $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$  in Abhängigkeit von den Hopping-Parametern  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  für ein hyperkubisches Gitter mit  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$  für  $\mu = 0$  graphisch dargestellt. In diesem Plot wird die  $U(3)$ -Eichtheorie betrachtet, die baryonischen Anteile werden also vernachlässigt. Das chirale Kondensat weist dann ein symmetrisches Verhalten in  $\kappa_s$  und  $\kappa_\tau$  auf. Die Zustandssumme  $Z_2^{\text{stagg.}}$  und die Zähler-Funktion wurden jeweils bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{24})$  betrachtet. Das negative Vorzeichen von  $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$  wurde vernachlässigt.

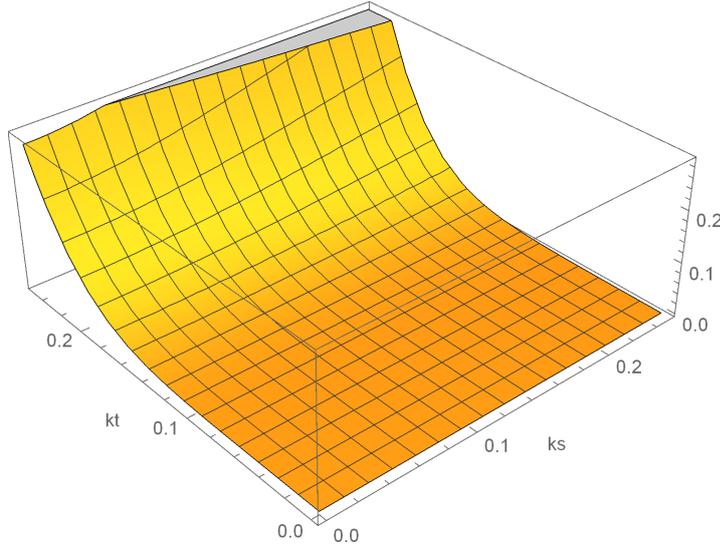
werden die baryonischen Anteile vernachlässigt, sodass das chirale Kondensat ein symmetrisches Verhalten in den Argumenten  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  aufweist. Diese **chirale Symmetrie** wird durch die Anwesenheit von Baryonen in der  $SU(3)$ -Theorie gebrochen (siehe Abb. 3). Die Werte von  $\kappa_s$  und  $\kappa_\tau$  befinden sich im Intervall  $[0, \frac{1}{4}]$ , da dieser Ordnungsparameter im **Heavy-Quark-Mass-Regime** untersucht wird und die Funktion  $\frac{1}{Z_2^{\text{stagg.}}}$  für  $\kappa_\tau > \frac{1}{4}$  Polstellen aufweist.

### 3.3.2. Der Polyakov-Loop-Erwartungswert

Ein zentraler Aspekt dieser Master-Arbeit ist die Herleitung einer effektiven Theorie für Kogut-Susskind-Fermionen, die als dynamische Variable den Polyakov-Loop  $L_{\vec{x}}$  enthält. Mithilfe einer effektiven Wirkung können fermionische Theorien und auch Eich-Theorien verstanden werden. Hierzu gehört insbesondere die Eigenschaft, dass nicht-abelsche  $SU(N)$ -Theorien bei endlicher Temperatur einen Übergang zwischen einer Tief- und einer Hochtemperaturphase zeigen, den *Confinement-Deconfinement-Phasenübergang*.

Im letzten Abschnitt wird eine Observable betrachtet, die Confinement charakterisiert bzw. einen Ordnungsparameter für einen solchen Phasenübergang darstellt. Diese Observable ist der *Polyakov-Loop-Erwartungswert*  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$ .

Der Polyakov-Loop ist sowohl mit der Zentrumssymmetrie der Eichtheorie, als auch über die freie Energie eines Quarks  $F_q$  über die Relation  $\langle L_{\vec{x}} \rangle \propto e^{-\beta F_q}$  mit dem Confinement eng verbunden (siehe [Greensite; 2003] und [Pisarski; 2002]). Solange  $\langle L_{\vec{x}} \rangle = 0$  ist, muss  $F_q$  unendlich groß sein, was bedeutet, dass die Existenz eines einzelnen Quarks unmöglich ist. Erst bei einem endlichen Erwartungswert für  $L_{\vec{x}}$  wird  $F_q$  ebenfalls endlich,



**Abb. 3:** In diesem 3D-Plot wird das chirale Kondensat  $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$  in Abhängigkeit von den Hopping-Parametern  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  für ein hyperkubisches Gitter mit  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$  für  $\mu = 1$  graphisch dargestellt. In diesem Plot wird die  $SU(3)$ -Eichtheorie betrachtet, die baryonischen Anteile werden also berücksichtigt. Durch die Anwesenheit der Baryonen wird die Symmetrie in  $\kappa_s$  und  $\kappa_\tau$  gebrochen, da das chirale Kondensat bei zunehmenden  $\kappa_\tau$ - und abnehmenden  $\kappa_s$ -Werten zusätzlich ansteigt. Die Zustandssumme  $Z_2^{\text{stagg.}}$  und die Zählerfunktion wurden jeweils bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{120})$  betrachtet. Das negative Vorzeichen von  $\langle \bar{\chi}\chi \rangle$  wurde vernachlässigt.

wodurch Deconfinement möglich ist.

Der Erwartungswert einer Polyakov-Loop-abhängigen Observablen  $\mathcal{O}$  wird für die rein fermionische effektive Theorie auf dem Gitter folgendermaßen definiert:

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{Z_2^{\text{stagg.}}} \int [dW] \mathcal{O}_{\vec{x}} e^{-S_{\text{eff}}^F}. \quad (3.42)$$

Dabei ist  $e^{-S_{\text{eff}}^F}$  die in Kapitel 2 hergeleitete effektive Wirkung, die die kinetische  $\kappa_s^2$ -Korrektur für Kogut-Susskind-Fermionen enthält (siehe Gl.(2.66)).

Um den Polyakov-Loop-Erwartungswert  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  ermitteln zu können, wird der Operator in Gl.(3.42) durch den Polyakov-Loop ersetzt,  $\mathcal{O}_{\vec{x}} = L_{\vec{x}}$ .

In Gl.(3.42) müssen also erneut Integrale über Polyakov-Loops berechnet werden. Es werden nur die Ergebnisse dieser Integrale angegeben (siehe Appendix (A.2.3) bzw. Rechenschritte in Kapitel 2; der Faktor  $A_1^3$  wird dabei gekürzt):

$$\begin{aligned} \int [dW] L_{\vec{x}} \cdot \det(Q_{\text{stat}}) &= z_0^{N_s^3-1} \cdot \int dW_{\vec{x}} L_{\vec{x}} \left[ 1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3 \right] \left[ 1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3 \right] \\ &= z_0^{N_s^3-1} \cdot \left[ \bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 h_1 + h_1^2 + \bar{h}_1^3 h_1^2 + \bar{h}_1 h_1^3 \right]. \end{aligned}$$

Der  $z_0$ -Term entspricht dem Integral über die statische Quark-Determinante (siehe Gl.(2.29)). Die restlichen Integrale in Gl.(3.42) enthalten zusätzlich die Knoten-Funktionen  $W_{11}(\vec{x})$  und  $\bar{W}_{11}(\vec{x})$  und sind linear im Kopplungsparameter  $h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}$ . Die Ergebnisse dieser Integrale lauten:

$$\int [dW] L_{\vec{x}} \cdot W_{11}(\vec{x}) \cdot \det(Q_{\text{stat}}) = z_0^{N_s^3-1} \cdot [\bar{h}_1^2 h_1 + 2h_1^2 + 2\bar{h}_1^3 h_1^2 + 3\bar{h}_1 h_1^3]. \quad (3.43)$$

Auf analoge Weise erhält man für das  $\bar{W}_{11}(\vec{x})$ -Integral ein unterschiedliches Resultat:

$$\int [dW] L_{\vec{x}} \cdot \bar{W}_{11}(\vec{x}) \cdot \det(Q_{\text{stat}}) = z_0^{N_s^3-1} \cdot [\bar{h}_1 + 2\bar{h}_1^2 h_1 + 3\bar{h}_1^3 h_1^2 + \bar{h}_1 h_1^3]. \quad (3.44)$$

Schließlich erfolgt die Berechnung der Integrale mit doppelt auftretenden Knoten-Funktionen. Insbesondere bei den Integral-Termen, die die gemischten Knoten-Funktion-Paare  $\bar{W}_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y})$  und  $\bar{W}_{11}(\vec{y})W_{11}(\vec{x})$  enthalten, müssen die Nächste-Nachbar-Ortsargumente  $\vec{x}, \vec{y}$  beachtet werden, da sich die Resultate in Gl.(3.43) und Gl.(3.44) unterscheiden. Das hat zur Folge, dass auch die  $\bar{W}_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y})$ - und  $\bar{W}_{11}(\vec{y})W_{11}(\vec{x})$ -Anteile von  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  verschiedene Beiträge und Koeffizienten in den Ordnungen von  $\kappa_\tau$  aufweisen. Die Resultate für diese Integrale lauten:

$$\int [dW] L_{\vec{x}} \cdot W_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y}) \cdot \det(Q_{\text{stat}}) = z_0^{N_s^3-2} [6\bar{h}_1^5 + 2\bar{h}_1 h_1^3 + 10\bar{h}_1^2 h_1^4 + 18\bar{h}_1^3 h_1^5 + 9\bar{h}_1 h_1^6 + 9\bar{h}_1^4 h_1^6 + \bar{h}_1^3 h_1^2 + 4\bar{h}_1^4 h_1^3 + 7\bar{h}_1^5 h_1^4 + 6\bar{h}_1^6 h_1^5],$$

sowie

$$\int [dW] L_{\vec{x}} \cdot \bar{W}_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y}) \cdot \det(Q_{\text{stat}}) = z_0^{N_s^3-2} [3\bar{h}_1^4 + \bar{h}_1^2 h_1 + 4\bar{h}_1^3 h_1^2 + 13\bar{h}_1^4 h_1^3 + 6\bar{h}_1^5 h_1 + 9\bar{h}_1^6 h_1^2 + 12\bar{h}_1^5 h_1^4 + 9\bar{h}_1^6 h_1^5 + \bar{h}_1^2 h_1^4 + 2\bar{h}_1^3 h_1^5 + 3\bar{h}_1^4 h_1^6].$$

Schließlich erhält man für die  $\bar{W}_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y})$ - und  $\bar{W}_{11}(\vec{y})W_{11}(\vec{x})$ -Anteile:

$$\int [dW] L_{\vec{x}} \cdot W_{11}(\vec{x})\bar{W}_{11}(\vec{y}) \cdot \det(Q_{\text{stat}}) = z_0^{N_s^3-2} [7\bar{h}_1^3 h_1^2 + 2\bar{h}_1 h_1^3 + 7\bar{h}_1^2 h_1^4 + 12\bar{h}_1^3 h_1^5 + 13\bar{h}_1^4 h_1^6 + 9\bar{h}_1^4 h_1^6 + 3\bar{h}_1^5 h_1 + 7\bar{h}_1^5 h_1^4 + 6\bar{h}_1^6 h_1^2 + 6\bar{h}_1^6 h_1^5]$$

und

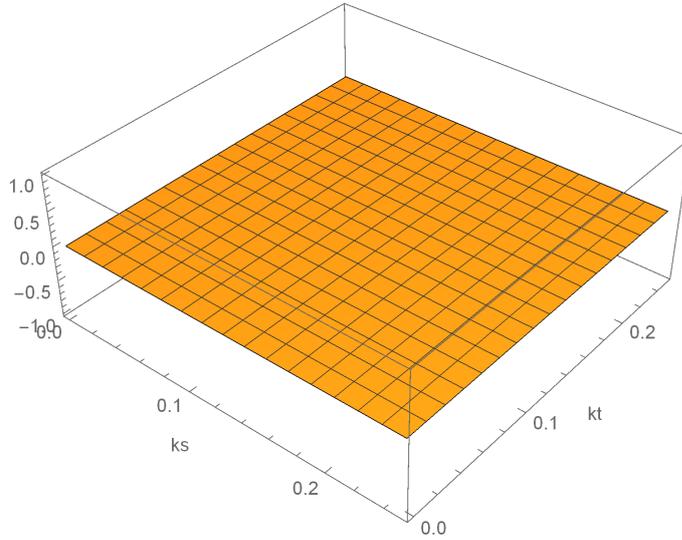
$$\int [dW] L_{\vec{x}} \cdot \bar{W}_{11}(\vec{x})W_{11}(\vec{y}) \cdot \det(Q_{\text{stat}}) = z_0^{N_s^3-2} [3\bar{h}_1 h_1^3 + \bar{h}_1^2 h_1 + 2\bar{h}_1^3 h_1^2 + 7\bar{h}_1^4 h_1^3 + 12\bar{h}_1^5 h_1^4 + 11\bar{h}_1^3 h_1^5 + 9\bar{h}_1^6 h_1^5 + 3\bar{h}_1 h_1^6 + \bar{h}_1^2 h_1^4 + 3\bar{h}_1^4 h_1^6].$$

Setzt man alle ermittelten Resultate in die Definition des Polyakov-Loop-Erwartungswertes ein und nutzt dabei aus, dass die Summe  $\sum_{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}$  in Gl.(3.42) den

Faktor  $6N_s^3$  generiert, so erhält man schließlich:

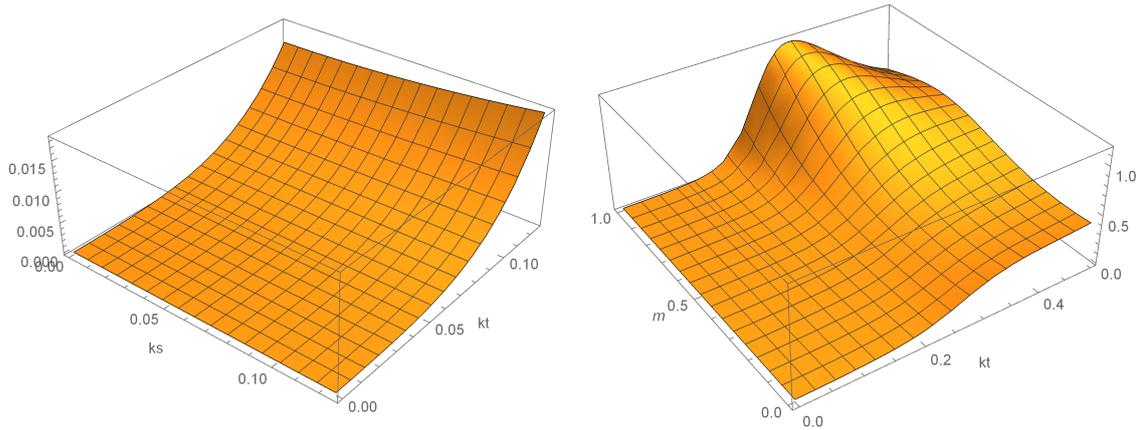
$$\begin{aligned} \langle L_{\vec{x}} \rangle = & \frac{1}{\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}} \left[ (1 + 6N_s^3 h_2 N_c^2 k^2(\kappa_\tau)) z_0^{N_s^3 - 1} [\bar{h}_1 + \bar{h}_1^2 h_1 + h_1^2 + \bar{h}_1^3 h_1^2 + \bar{h}_1 h_1^3] \right. \\ & + 12N_s^3 N_c k(\kappa_\tau) h_2 z_0^{N_s^3 - 1} [2h_1^2 + 4\bar{h}_1 h_1^3 + 3\bar{h}_1^2 h_1 + 5\bar{h}_1^3 h_1^2 + \bar{h}_1] \\ & + 6N_s^3 N_c h_2 z_0^{N_s^3 - 2} [6h_1^5 + 7\bar{h}_1 h_1^3 + 19\bar{h}_1^2 h_1^4 + 43\bar{h}_1^3 h_1^5 + 12\bar{h}_1 h_1^6 + 24\bar{h}_1^4 h_1^6 + 14\bar{h}_1^3 h_1^2 \\ & \left. + 37\bar{h}_1^4 h_1^3 + 38\bar{h}_1^5 h_1^4 + 30\bar{h}_1^6 h_1^5 + 3\bar{h}_1^4 + 2\bar{h}_1^2 h_1 + 9\bar{h}_1^5 h_1 + 15\bar{h}_1^6 h_1^2] \right]. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Der Polyakov-Loop-Erwartungswert stellt wie das chirale Kondensat eine gebrochenrationale Funktion dar, wobei die Zähler-Funktion und  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  Polynome in  $\kappa_s^2$  und  $\kappa_\tau$  sind. Mit *Mathematica* konnte auch der Polyakov-Loop-Erwartungswert exemplarisch für



**Abb. 4:** In diesem 3D-Plot wird der Polyakov-Loop-Erwartungswert  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  in Abhängigkeit von den Hopping-Parametern  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  für ein hyperkubisches Gitter mit  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$  für  $\mu = 0$  graphisch dargestellt. In diesem Plot wird die  $U(3)$ -Eichtheorie betrachtet, die baryonischen Anteile werden also vernachlässigt. Dadurch nimmt  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  den Wert 0 an. In der  $U(3)$ -Theorie liegt damit Quark-Confinement vor. Die Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  wurde bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{24})$  betrachtet. Die Zähler-Funktion nimmt für  $\mu = 0$  den Wert 0 an.

ein hyperkubisches Gitter mit  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$  im **Heavy-Quark-Mass-Regime** berechnet werden. Die Zähler-Funktion und  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  wurden hierbei jeweils bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{24})$  für  $\mu = 0$  in der  $U(3)$ -Eichtheorie (d.h. ohne baryonische Anteile) und bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{120})$  für  $\mu = 1$  in der  $SU(3)$ -Eichtheorie (d.h. mit baryonischen Anteilen) betrachtet (siehe Abb. 4 und 5). Zudem wurde  $k(\kappa_\tau)$  bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_\tau^{12})$  entwickelt. In dem drei-dimensionalen Plot in Abb. 4 nimmt der Polyakov-Loop-Erwartungswert für  $\mu = 0$  für alle  $\kappa_s$  und  $\kappa_\tau$  den Wert 0 an. Damit wird bestätigt, dass die Existenz eines einzelnen Quarks nicht möglich ist und in der  $U(3)$ -Theorie *Quark-Confinement* vorliegt.



**Abb. 5: Links:** In diesem 3D-Plot wird der Polyakov-Loop-Erwartungswert  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  in Abhängigkeit von den Hopping-Parametern  $\kappa_\tau$  und  $\kappa_s$  für ein hyperkubisches Gitter mit  $N_\tau = 2$ ,  $N_s = 2$  für  $\mu = 1$  graphisch dargestellt. In diesem Plot wird die  $SU(3)$ -Eichtheorie betrachtet, die baryonischen Anteile werden also berücksichtigt.  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  nimmt genau dann den Wert 0 an, wenn schwere statische Quarks vorliegen. Für  $\mu = 1$  liegt dann Quark-Confinement vor. Für zunehmende  $\kappa_\tau$ -Werte im Intervall  $[0, \frac{1}{8}]$  tritt Deconfinement ein. Für  $\kappa_\tau > \frac{1}{8}$  nimmt  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  entlang der Diagonalen  $\kappa_s = \kappa_\tau$  (d.h. für  $\gamma = 1$ ) größere Werte an, wodurch  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  nicht mehr als Ordnungsparameter interpretiert werden kann. Die Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  und die Zähler-Funktion wurden bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2 \kappa_\tau^{120})$  betrachtet. **Rechts:** In diesem 3D-Plot wird  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  in Abhängigkeit von  $\kappa_s = \kappa_\tau$  (d.h.  $\gamma = 1$ ) und  $\mu \in [0, 1]$  untersucht. Für schwere Quarks, d.h. für  $\kappa_\tau \rightarrow 0$ , gilt für alle  $\mu$ :  $\langle L_{\vec{x}} \rangle = 0$ . Für leichte Quarks bzw. höhere  $\kappa_\tau$ -Werte erreicht  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  als Funktion von  $\mu$  einen niedrigeren Schwellwert, der mit der **Pauli-Saturierung** begründet werden kann.

In Abb. 5 (links) wird deutlich, dass der Polyakov-Loop-Erwartungswert - unabhängig vom Hopping-Parameter  $\kappa_s$  und damit unabhängig von der Anwesenheit dynamischer Quarks - den Wert  $\langle L_{\vec{x}} \rangle = 0$  erreicht, wenn die statischen Quarks schwer sind, d.h. für  $\kappa_\tau \rightarrow 0$ . Nimmt  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  in Abb. 5 (links) einen endlichen Wert für nicht-verschwindende  $\kappa_\tau$ -Werte an, so wird durch die Anwesenheit von Baryonen Deconfinement möglich. Damit stellt  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  - unter Berücksichtigung dynamischer Quarks der Ordnung  $\mathcal{O}(\kappa_s^2)$  - einen Ordnungsparameter im Intervall  $\kappa_\tau \in [0, \frac{1}{8}]$  dar, der den Phasenübergang zwischen Confinement und Deconfinement im **Heavy-Quark-Mass-Regime** beschreibt.

In der vollen Theorie - das heißt, wenn höhere Ordnungen in  $\kappa_s^2$  betrachtet werden und somit der Anteil dynamischer Quarks zusätzlich ansteigt - würde  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  nicht mehr diesen Phasenübergang beschreiben, da die Symmetrie durch die Anwesenheit dynamischer Quarks gebrochen wird.

In Abb. 5 (rechts) wird  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  in Abhängigkeit von  $\kappa_s = \kappa_\tau$  (d.h. für  $\gamma = 1$ ) und  $\mu \in [0, 1]$  untersucht. Für leichte Quarks bzw. höhere  $\kappa_\tau$ -Werte tritt hierbei die **Pauli-Saturierung** ein, da  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  als Funktion von  $\mu$  einen niedrigeren Schwellwert annimmt (siehe [Philipsen et al.; 2015]).

## 4. Zusammenfassung und Ausblick

Die hier vorgestellte effektive Theorie stellt einen Ansatz zur Untersuchung der Gitter-QCD mit schweren Kogut-Susskind-Quarks dar, an welcher herkömmliche Methoden scheitern. Dieser Ansatz basiert darauf, ein System stark wechselwirkender, schwerer Kogut-Susskind-Quarks in den beiden Hopping-Parametern  $\kappa_\tau \rightarrow 0$  und  $\kappa_s \rightarrow 0$  zu entwickeln. Mithilfe dieser **Hopping-Parameter-Entwicklung** kann also die rein fermionische effektive Theorie für schwere Quarks formuliert werden, um damit die Kontinuumsphysik der Heavy-Quark-QCD für Kogut-Susskind-Fermionen bei verschwindenden  $\beta$ -Korrekturen, dem **Strong Coupling Limit**, zu approximieren.

Ein zentraler Aspekt dieser Master-Arbeit bestand darin, eine 3d-effektive Theorie für schwere Kogut-Susskind-Quarks herzuleiten. Dazu wurden zunächst in *Kapitel 1* die wesentlichen Grundzüge der Kontinuumsphysik und der Gitterfeldtheorie bzw. Gitter-QCD vorgestellt. Darüber hinaus wurde die für analytische sowie numerische Berechnungen prominente Diskretisierungsmethode - die sogenannten **Kogut-Susskind-Fermionen** - näher erläutert.

In *Kapitel 2* erfolgte die analytische Herleitung der 3d-effektiven Theorie für  $N_f = 1$ -Flavor Kogut-Susskind-Fermionen mithilfe der Hopping-Parameter-Entwicklung, wobei die Eich-Anteile - ausgedrückt durch den Kopplungsparameter  $\lambda$  - in den darauffolgenden Kalkulationen vernachlässigt wurden.

Mit den nun vorliegenden Informationen zur 3d-effektiven Theorie und einigen berechneten Größen, wie der **statischen Quark-Determinante** und dem **Quark-Propagator**, konnte schließlich eine räumliche Hopping-Parameter-Entwicklung bis zur Ordnung  $\kappa_s^2$  durchgeführt werden, um daraus die **Single-Hop-Zustandssumme**  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  mit den kombinatorischen Koeffizienten der darin auftretenden Quark-Antiquark-Paare  $\bar{h}_1^k h_1^l$  zu ermitteln.

Ausgehend von der Single-Hop-Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  konnten abschließend die für die Untersuchung von Phasenübergängen relevanten Observablen - das chirale Kondensat  $\langle \bar{\chi} \chi \rangle$  und der Polyakov-Loop-Erwartungswert  $\langle L_{\vec{x}} \rangle$  - in *Kapitel 3* berechnet werden. Bevor diese Berechnungen durchgeführt wurden, erfolgte zunächst ein Vergleich der Single-Hop-Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  mit der **dualen Darstellung** für Kogut-Susskind-Fermionen im Strong Coupling Limit, sowie mit der korrespondierenden Single-Hop-Zustandssumme für **Wilson-Fermionen**,  $\mathcal{Z}_2^{\text{Wilson}}$ .

Wie bereits erwähnt, sind alle Eichkorrekturen vernachlässigt worden. Die Herleitung der 3 + 1-dimensionalen effektiven Theorie für Kogut-Susskind-Fermionen wurde somit nur auf das Strong Coupling Limit eingeschränkt.

Für die Berechnung der Eich-Wechselwirkung kann unter anderem im Wilson-Fermion-Fall die *Linked-Cluster-Entwicklung* verwendet werden (siehe [Glesaaen; 2016]). Mithilfe dieses Ansatzes ist es möglich, den Eichanteil in der Zustandssumme (siehe Gl.(2.66) bzw. [Glesaaen; 2016]), näher zu bestimmen. Die Linked-Cluster-Entwicklung führt dann zu einem Reihenausdruck in  $\lambda$ , indem Quellterme eingeführt und Funktional-Ableitungen aus-

geführt werden. Daraufhin müssen Eich-Integrale über auftretende Potenzen der Polyakov-Loops gelöst werden. Berücksichtigt man höhere Ordnungen des Kopplungsparameters  $h_2 = \frac{\kappa_s^2 N_\tau}{N_c}$ ,  $\lambda$  und sogar Mischterme beider Kopplungen, so werden die statischen Loop-Gewichtungsfaktoren  $\bar{h}_1, h_1$  und die Kopplung  $h_2$  nicht nur Funktionen der Hopping-Parameter  $\kappa_\tau, \kappa_s$ , sondern auch Funktionen der Eichkopplung  $\lambda$  (siehe [Glesaaen; 2016]).

Daraus ergibt sich unmittelbar die Fragestellung, ob die Linked-Cluster-Entwicklung auch auf Berechnungen von Observablen oder anderen physikalischen Parametern für Kogut-Susskind-Fermionen übertragen werden kann.

Schließlich wäre es noch von Interesse gewesen, weitere Observablen mithilfe der Single-Hop-Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg.}}$  zu ermitteln, wie z.B. die Erwartungswerte höherer Potenzen des Polyakov-Loops  $\langle L_{\vec{x}}^2 \rangle, \langle L_{\vec{x}}^3 \rangle$ , sowie die entsprechenden Potenzen des Anti-Polyakov-Loop-Erwartungswertes  $\langle L_{\vec{x}}^\dagger \rangle$ . Der Erwartungswert des kubischen Polyakov-Loops  $\langle L_{\vec{x}}^3 \rangle$  kann aus physikalischer Sicht als baryonischer Beitrag in dem verwendeten 3d-effektiven Modell interpretiert werden. Darüber hinaus könnte mit dem kubischen Polyakov-Loop-Erwartungswert die Korrelator-Funktion  $\langle L_{\vec{x}}^3 L_{\vec{y}}^3 \rangle - \langle L_{\vec{x}}^3 \rangle \langle L_{\vec{y}}^3 \rangle$  berechnet werden. Man kann zeigen, dass der zusammenhängende Korrelator zweier kubischer Polyakov-Loops mit dem Potential zwischen zwei wechselwirkenden Baryonen auf einer Position im Gitter assoziiert werden kann. Der Korrelator müsste dann als Funktion des Abstandes zwischen den beiden Baryonen ermittelt werden, allerdings werden hierfür höhere Ordnungsterme im Hopping-Parameter  $\kappa_s$  der Kogut-Susskind-Fermion-Zustandssumme benötigt.

## A. Appendix

In diesem Abschnitt werden zentrale mathematische Aspekte dieser Ausarbeitung - zum Einen einige relevante Formeln zur Berechnung des  $\kappa_s^2$ -Beitrages der Single-Hop-Zustandsfunktion - näher erläutert und hergeleitet. Darunter zählen auch die mathematischen Eigenschaften der Kogut-Susskind-Phasenfaktoren  $\eta_\mu(x)$ , die in Kapitel 2 verwendet wurden. Die im Folgenden aufgeführten Inhalte basieren auf [Sciarrà; 2016] bzw. [Kogut, Susskind; 1975] und [Glesaaen; 2016].

### A.1. Der Kogut-Susskind-Formalismus

Die Kernidee des Kogut-Susskind-Formalismus wurde bereits in Abschnitt 1.2.3 vorgestellt. In diesem Abschnitt werden einige mathematische Aspekte dieser Diskretisierungsmethode - insbesondere der **Kogut-Susskind-Phasen**  $\eta_\mu(x)$  erklärt und hergeleitet. Zusätzliche Aspekte - wie die chirale Symmetrie der Kogut-Susskind-Theorie - werden in diesem Appendix nicht näher thematisiert.

Für detaillierte Informationen zum Kogut-Susskind-Formalismus wird auf [Sciarrà; 2016] bzw. [Kogut, Susskind; 1975] verwiesen.

#### A.1.1. Die Kogut-Susskind-Phasen $\eta_\mu(x)$

Die Transformationsmatrix  $T(n) = \gamma_0^{n_0} \gamma_1^{n_1} \gamma_2^{n_2} \gamma_3^{n_3}$  erfüllt die in Gl.(1.20) angegebene Identität  $T^\dagger(n) \gamma_\mu T(n \pm \hat{\mu}) = \eta_\mu(n) \mathbf{1}$ , aus der sich die **Kogut-Susskind-Phasen**

$$\eta_0(n) = 1, \quad \eta_\mu(n) = (-1)^{\sum_{\nu < \mu} n_\nu} \quad \text{für } \mu \neq 0 \quad (\text{A.1})$$

ergeben. Verwendet man die **Clifford-Algebra** der Gamma-Matrizen für den euklidischen Raum,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu, \quad (\text{A.2})$$

folgt daraus, dass  $(\gamma_\mu)^2 = \mathbf{1}$  und es kann eine Fallunterscheidung bzgl. des Index  $\mu$  durchgeführt werden (siehe [Sciarrà; 2016] und [Kogut, Susskind; 1975] für eine detaillierte Herleitung).

Schließlich werden die folgenden beiden Identitäten für die **Kogut-Susskind-Phasen** - die auch zur Berechnung der Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg}}$  verwendet wurden - hergeleitet (der Vektor  $\rho$  ist ein Vektor mit den Einträgen 0 und 1),

$$\eta_\mu(\rho \pm \hat{\mu}) = \eta_\mu(\rho) \quad (\text{A.3})$$

$$\eta_\mu(\rho) \eta_\nu(\rho \pm \hat{\mu}) = -\eta_\nu(\rho) \eta_\mu(\rho \pm \hat{\nu}) \quad \text{mit } \mu \neq \nu, \quad (\text{A.4})$$

wobei die beiden Vorzeichen  $\pm$  in der unteren Gleichung unabhängig voneinander sein können:

$$\text{zu (A.3): } \eta_\mu(\rho \pm \hat{\mu}) = (-1)^{\sum_{\nu < \mu} (\rho_\nu \pm \hat{\mu}_\nu)} = (-1)^{\sum_{\nu < \mu} \rho_\nu} = \eta_\mu(\rho)$$

$$\begin{aligned}
\text{zu (A.4): } \eta_\mu(\rho)\eta_\nu(\rho \pm \hat{\mu}) &= (-1)^{\sum_{\sigma < \mu} \rho_\sigma} \cdot (-1)^{\sum_{\sigma < \mu} (\rho \pm \hat{\mu})_\sigma} \\
&= \begin{cases} (-1)^{\sum_{\sigma < \mu} \rho_\sigma} \cdot (-1)^{\sum_{\sigma < \nu} \rho_\sigma} \cdot (-1) = -\eta_\nu(\rho)\eta_\mu(\rho \pm \hat{\nu}) & \text{falls } \mu < \nu \\ (-1)^{\sum_{\sigma < \mu} \rho_\sigma} \cdot (-1)^{\sum_{\sigma < \nu} \rho_\sigma} = -\eta_\nu(\rho)\eta_\mu(\rho \pm \hat{\nu}) & \text{falls } \nu < \mu. \end{cases}
\end{aligned}$$

## A.2. Analytische Hilfsmittel für die $SU(N)$ -Algebra

Die analytischen Berechnungen, die in diesem Abschnitt vorgestellt werden, beziehen sich auf unterschiedliche  $SU(N)$ -abhängige Größen. In diesem Teil des Appendix werden also Komponenten wie das Haar-Maß, Charakter-Integrale, Integrale über Gruppen-Polynome, sowie die für die effektive Theorie relevanten fermionischen Funktionen, wie die statische Quark-Determinante für Kogut-Susskind-Fermionen ermittelt.

### A.2.1. Berechnung des Haar-Maßes

Das erste Ziel besteht darin, das invariante Gruppen-Maß eines Gruppen-Elementes zu bestimmen, welches über eine Spektral-Zerlegung dargestellt werden kann. Jede Matrix-Darstellung einer  $U(N)$ -Matrix besitzt unitäre Eigenwerte  $\lambda_i = e^{i\theta_i}$ , wobei für Elemente der  $SU(N)$  die zusätzliche Bedingung  $\sum_i \theta_i = 0 \pmod{2\pi}$  erfüllt sein muss.

Eine beliebige Matrix  $U$ , die eine Darstellung der  $U(N)$  ist, besitzt die folgende Zerlegung:

$$U = W \Lambda W^\dagger, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $\Lambda = \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$  eine Diagonal-Matrix ist und  $W W^\dagger = \mathbf{1}_R$  gilt. Eine Veränderung in  $U$  lautet somit

$$dU = W d\Lambda W^\dagger + W [W^\dagger dW, \Lambda] W^\dagger. \quad (\text{A.6})$$

Unter Verwendung der kanonischen Metrik für unitäre Matrizen,  $\|M\|^2 = \text{tr}(M^\dagger M)$  beträgt die Größe eines infinitesimal kleinen Quadrats in diesem Koordinaten-Raum

$$ds^2 = \text{tr}(dU^\dagger dU) = \sum_i d\theta_i^2 + 2 \sum_{i>j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2 |(W^\dagger dW)_{ij}|^2. \quad (\text{A.7})$$

Jede Koordinate kann über die Metrik mittels  $ds^2 = g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu$  identifiziert werden, woraus das folgende Maß konstruiert werden kann:

$$dU(x) = \sqrt{\det g(x)} \prod_\mu d\xi^\mu. \quad (\text{A.8})$$

Mit der *Baker-Campbell-Hausdorff-Formel* kann der Term  $W^\dagger dW$  über die Generatoren von  $U(d_R)$  ausgedrückt werden,

$$(W^\dagger dW)_{ij} = i(T_a)_{ij} f_{ab}(w) dw_b \equiv Q_{ijk}(w) dw_k. \quad (\text{A.9})$$

Hierbei bezeichnet  $f$  eine Funktion der Parameter aus der Generator-Zerlegung. Die allgemeinen Koordinaten werden somit eine Kombination aus den Eigenwert-Winkeln  $\theta_i$  und

den Parametern  $w_i$ . Die Determinante dieser Metrik faktorisiert in einen Anteil, der von diesen Koordinaten abhängt, und man erhält

$$\det g(x) \propto (\det Q(w))^2 \prod_{i>j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^4. \quad (\text{A.10})$$

Da nur die Integrale über die Eigenwerte eine entscheidende Rolle spielen, können die  $w_i$ -Anteile ausintegriert werden. Man erhält somit das invariante Maß

$$dU = \underbrace{\prod_{i>j} |e^{i\theta_i} - e^{i\theta_j}|^2}_{= H(U)} \prod_i d\theta_i, \quad (\text{A.11})$$

wobei  $H(U)$  das *Haar-Maß* darstellt. Obwohl diese Relation nur für die  $U(N)$  gültig ist, kann diese auf den  $SU(N)$ -Fall erweitert werden, indem man die Bedingung  $\sum_i \theta_i = 0 \pmod{2\pi}$  berücksichtigt.

Die *Vandermonde-Determinante* wird eingeführt, um die Berechnung des Haar-Maßes zu erleichtern,

$$\prod_{i>j} (z_i - z_j) = \det(\mathcal{M}) = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{N-1} \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_N & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

und das Haar-Maß anders darzustellen,

$$H(U) = \prod_{i>j} |z_i - z_j|^2 = \det(\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}) = \begin{vmatrix} N & \sum_i z_i & \sum_i z_i^2 & \dots & \sum_i z_i^{N-1} \\ \sum_i z_i^\dagger & N & \sum_i z_i & \dots & \sum_i z_i^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_i (z_i^\dagger)^{N-1} & \sum_i (z_i^\dagger)^{N-2} & \sum_i (z_i^\dagger)^{N-3} & \dots & N \end{vmatrix}.$$

Die fundamentale Darstellung der  $SU(N)$  besitzt  $N - 1$  Eigenwerte. Es ist bekannt, dass

$$\sum_i z_i^m = \text{tr}(U^m) \equiv \chi_m, \quad (\text{A.13})$$

die  $m$ -te Potenz eines Charakters ist. Daher kann das *Cayley-Hamilton-Theorem* verwendet werden, um den Zusammenhang zwischen den einzelnen Winkeln zu ermitteln. Das Cayley-Hamilton-Theorem lautet

$$M^N + c_{N-1} M^{N-1} + \dots c_1 M + (-1)^N \det M \mathbf{1}_R = 0. \quad (\text{A.14})$$

Die darin auftretenden Koeffizienten können mit dem *Faddeev-LeVerrier-Algorithmus* berechnet werden,

$$c_{N-m} = -\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m c_{N-m+k} \text{tr}(M^k). \quad (\text{A.15})$$

Der erste und letzte Koeffizient lauten somit  $c_N = 1$  und  $c_1 = (-1)^N \det M$ , wie in Gl.(A.14) angegeben.

Verwendet man nun die Eigenschaften der  $SU(N)$ -Algebra, nämlich  $\det U = 1$  und  $U^\dagger U = \mathbf{1}$ , kann man Gl.(A.14) mit Potenzen von  $U^\dagger$  multiplizieren und anschließend die Spur auf diese Gleichung anwenden, um Relationen zwischen den unterschiedlichen fundamentalen Charakteren herzuleiten und somit die Anzahl der Unbekannten im Haar-Maß zu reduzieren.

So erhält man beispielsweise für den relevanten  $SU(3)$ -Fall den Term  $\chi_2 = \chi^2 - 2\chi^*$ , woraus sich der folgende Ausdruck für das Haar-Maß ergibt:

$$H(U) = \begin{vmatrix} 3 & \chi & \chi^2 - 2\chi^* \\ \chi^* & 3 & \chi \\ (\chi^*)^2 - 2\chi & \chi^* & 3 \end{vmatrix} = 27 - 18|\chi|^2 + 8\text{Re}(\chi^3) - |\chi|^4. \quad (\text{A.16})$$

## A.2.2. $\chi_r \chi_s$ -Charakter-Integrale

In dieser Ausarbeitung treten regelmäßig Integrale der Form

$$I_{nm} = \int dU \chi(U)^n \chi(U^\dagger)^m \quad (\text{A.17})$$

auf. Diese können meistens mit Hilfe einer Zerlegung in trigonometrische Funktionen bestimmt werden. Setzt man

$$\chi(U) = \sum_{\alpha=1}^N e^{i\theta_\alpha} \quad \text{und} \quad \chi(U^\dagger) = \sum_{\alpha=1}^N e^{-i\theta_\alpha} \quad \text{mit} \quad \sum_{\alpha=1}^N \theta_\alpha = 0 \pmod{2\pi} \quad (\text{A.18})$$

in Gl.(A.17) ein, so ergibt sich

$$I_{nm} = \int [d\theta]_i H(U) \delta\left(\sum_i \theta_i = 0\right) \sum_{\{n_i\}} \sum_{\{m_i\}} \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^m \frac{k!}{n_k! m_l!} e^{in_k \theta_k - im_l \theta_l}, \quad (\text{A.19})$$

mit Summen über ganzzahlige Partitionen, die die Bedingung

$$\sum_{i=1}^N (n, m)_i = (n, m) \quad (\text{A.20})$$

erfüllen. Da die  $\alpha$ -Phasen-Integrale den Wert

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\alpha e^{in\alpha} = \delta(n), \quad \text{fr } n \in \mathbf{Z} \quad (\text{A.21})$$

liefern, kann aus der Integration nur dann ein nicht-verschwindender Beitrag resultieren, wenn sich die Exponenten in den Exponential-Funktionen herauskürzen.

### A.2.3. Integrale über Charaktere der $SU(3)$

Für die zuvor behandelten Integrale gibt es keine allgemeine Lösung, aus diesem Grund wird der relevante Fall der  $SU(3)$ -Gruppe betrachtet. In diesem Fall liegen nur zwei freie Winkel vor, die mit  $\theta$  und  $\phi$  bezeichnet werden. Das volle Integral in Gl.(A.17) lautet somit

$$\begin{aligned} I_{nm} &= \int d\theta d\phi H(\theta, \phi) (e^{i\theta} + e^{i\phi} + e^{-i(\theta+\phi)})^n (e^{-i\theta} + e^{-i\phi} + e^{i(\theta+\phi)})^m \quad (\text{A.22}) \\ &= \int d\theta d\phi H(\theta, \phi) \sum_{\{l_i\}} \sum_{\{k_i\}} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} \frac{m!}{k_1!k_2!k_3!} e^{i\theta(l_1-l_3-k_1+k_3)+i\phi(l_2-l_3-k_2+k_3)}. \end{aligned}$$

Man definiert das folgende Integral ohne Maß,  $J_{nm} = \int [d\theta]_i \chi^n \chi^\dagger{}^m$ . Dieses lautet:

$$J_{nm} = (2\pi)^2 \sum_{\{l_i\}} \sum_{\{k_i\}} \frac{n!}{l_1!l_2!l_3!} \frac{m!}{k_1!k_2!k_3!} \delta(l_1 - l_3 - k_1 + k_3) \delta(l_2 - l_3 - k_2 + k_3). \quad (\text{A.23})$$

Führt man die Summe über alle vier Variablen explizit aus, so erhält man

$$J_{nm} = (2\pi)^2 \sum_{l=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{n!}{l! \left(k + \frac{n-m}{3}\right)! \left(\frac{2n+m}{3} - l - k\right)!} \frac{m!}{k! \left(l + \frac{m-n}{3}\right)! \left(\frac{2m+n}{3} - l - k\right)!},$$

wobei die restlichen Variablen  $l$  und  $k$  so festgelegt sind, dass die Fakultäten nicht-negative Argumente besitzen. Da das Haar-Maß selbst durch Charaktere dargestellt werden kann, erkennt man mit Gl.(A.16), dass

$$I_{n,m} = 27J_{n,m} - 18J_{n+1,m+1} + 4J_{n+3,m} + 4J_{n,m+3} - J_{n+2,m+2} \quad (\text{A.24})$$

gilt. Man erkennt unmittelbar, dass  $J_{nm}$  symmetrisch unter Vertauschung der Indizes

$\tilde{I}_{nm}$	$\mathbf{1}$	$\chi\chi^\dagger$	$(\chi\chi^\dagger)^2$	$(\chi\chi^\dagger)^3$	$(\chi\chi^\dagger)^4$	$(\chi\chi^\dagger)^5$	$(\chi\chi^\dagger)^6$
$\mathbf{1}$	1	1	2	6	23	103	513
$\chi^3$	1	3	11	47	225	1173	6529
$\chi^6$	5	21	98	498	2709	15565	93500
$\chi^9$	42	210	1122	6336	37466	230230	1461330
$\chi^{12}$	462	2574	15015	91091	571428	3688932	24410334
$\chi^{15}$	6006	36036	223652	1429428	9372168	62833836	429568036

**Tab. 2:** In dieser Tabelle sind einige Integrale über Charaktere der  $SU(3)$ -Algebra aufgelistet. Der Integrand setzt sich hierbei aus dem Produkt der Einträge der ersten Zeile und den Einträgen der ersten Spalte zusammen. Die Charaktere können mit den Polyakov-Loops identifiziert werden,  $L_{\vec{x}} = \text{tr}(W) \equiv \chi$  und  $L_{\vec{x}}^\dagger = \text{tr}(W^\dagger) \equiv \chi^\dagger$ . Alle anderen Integrale ergeben aufgrund der Auswahlregel, siehe Gl.(A.32), den Wert Null.

$n, m$  ist,  $J_{nm} = J_{mn}$  - und damit auch  $I_{nm}$ . Man führt daher das normalisierte Integral,  $\tilde{I}_{nm} = \frac{I_{nm}}{I_{00}}$ , ein. Einige Werte für  $\tilde{I}_{nm}$  können in Tabelle 2 eingesehen werden. Dabei stellt sich heraus, dass diese Koeffizienten eine kombinatorische Bedeutung aufweisen (siehe

[OEIS; 2011]). Betrachtet man sich z.B. die erste Zeile dieser Tabelle, so stellt diese die Sequenz der Permutationen der symmetrischen Gruppe  $S_n$  mit der längsten wachsenden Sequenz-Länge kleiner oder gleich 3 dar (siehe [Glesaaen; 2016]). Die erste Spalte dagegen entspricht den 3-dimensionalen *Catalan-Zahlen* (siehe [Unger; 2014]).

#### A.2.4. Die $g^n(g^{-1})^m$ -Gruppen-Integrale

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Berechnung von Integralen über Matrix-Darstellungen der  $SU(N)$ -Algebra vorgestellt. Damit sind Integrale der Form

$$I_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n}^{k_1 l_1, \dots, k_m l_m} = \int dU U_{i_1 j_1} \dots U_{i_n j_n} U_{k_1 l_1}^\dagger \dots U_{k_m l_m}^\dagger \quad (\text{A.25})$$

gemeint. Es existieren verschiedene Ansätze zur Ermittlung solcher Integrale, unter anderem in [Creutz; 1978a, 1978b], die an dieser Stelle kurz vertieft werden.

Zunächst wird das *generierende Funktional*

$$\mathcal{W}(J, K) = \int dU \exp(\text{tr}(JU + KU^\dagger)) \quad (\text{A.26})$$

eingeführt, um das Integral in Gl.(A.25) folgendermaßen darzustellen:

$$I_{i_1 j_1, \dots, i_n j_n}^{k_1 l_1, \dots, k_m l_m} = \left( \frac{\partial}{\partial J_{i_1, j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{i_n, j_n}} \frac{\partial}{\partial K_{k_1, l_1}} \dots \frac{\partial}{\partial K_{k_m, l_m}} \right) \mathcal{W}(J, K) \Big|_{J=K=0}. \quad (\text{A.27})$$

Mit einer *Kofaktor-Entwicklung* in  $U^\dagger$  kann die  $K$ -Abhängigkeit beseitigt werden,

$$\begin{aligned} U_{ij}^\dagger &= \frac{1}{\det U} (\text{cof } U^T)_{ij} \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{j, i_1, \dots, i_{N-1}} \epsilon_{i, j_1, \dots, j_{N-1}} U_{i_1 j_1} \dots U_{i_{N-1} j_{N-1}}. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Hierbei wurden die total anti-symmetrischen  $\epsilon$ -Tensoren verwendet. Die  $K$ -Abhängigkeit des generierenden Funktionals kann somit aus dem Integral faktorisiert werden,

$$\mathcal{W}(J, K) = \exp\left(\text{tr}\left(K \text{cof} \frac{\partial}{\partial J}\right)\right) \underbrace{\int dU \exp(\text{tr}(JU))}_{= \mathcal{W}(J)}. \quad (\text{A.29})$$

Da das generierende Funktional die Eigenschaft  $\mathcal{W}(VUW) = \mathcal{W}(U)$  für beliebige Matrizen  $W, V \in SU(3)$  besitzt (siehe [Creutz; 1978a]), kann das Funktional  $\mathcal{W}(J)$  über Determinanten entwickelt werden. Man erhält schließlich

$$\mathcal{W}(J) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2! \dots (N-1)!}{i! \dots (i+N-1)!} (\det J)^i. \quad (\text{A.30})$$

Aus diesem Ausdruck kann eine Auswahlregel für Gruppen-Integrale hergeleitet werden. Da die Determinante einer  $N \times N$ -Matrix ein Polynom  $N$ -ter Ordnung ihrer Einträge ist,

$$\det M = \frac{1}{N!} \epsilon_{i_1, \dots, i_N} \epsilon_{j_1, \dots, j_N} M_{i_1 j_1} \dots M_{i_N j_N}, \quad (\text{A.31})$$

bleiben nur Faktoren von Ableitungen  $N$ -ter Ordnung von  $\mathcal{W}$  übrig, wenn man  $J = 0$  setzt. Da zusätzlich der Kofaktor ein Polynom  $(N - 1)$ -ter Ordnung darstellt, erhält man somit die Auswahlregel für Gruppenintegrale

$$\int dU U^n U^\dagger{}^m \neq 0 \leftrightarrow n - m \equiv 0 \pmod{N_c} \quad (\text{A.32})$$

Um diesen Abschnitt abzuschließen, wird hier exemplarisch das Gruppen-Integral berechnet, das bei der Ermittlung der Single-Hop-Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg}}$  auftrat:

$$\begin{aligned} I_{ij}^{kl} &= \int dU U_{ij} U_{kl}^\dagger = \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{l, i_1, \dots, i_{N-1}} \epsilon_{k, j_1, \dots, j_{N-1}} \int dU U_{ij} U_{i_1 j_1} \dots U_{i_{N-1} j_{N-1}} \\ &= \frac{1}{(N-1)!} \epsilon_{l, i_1, \dots, i_{N-1}} \epsilon_{k, j_1, \dots, j_{N-1}} \left( \frac{\partial}{\partial J_{i,j}} \frac{\partial}{\partial J_{i_1, j_1}} \dots \frac{\partial}{\partial J_{i_{N-1}, j_{N-1}}} \right) \mathcal{W}(J, K) \Big|_{J=0} \\ &= \frac{1}{N!(N-1)!} \epsilon_{l, i_1, \dots, i_{N-1}} \epsilon_{k, j_1, \dots, j_{N-1}} \epsilon_{i, i_1, \dots, i_{N-1}} \epsilon_{j, j_1, \dots, j_{N-1}} \\ &= \frac{1}{N!(N-1)!} (N-1)! \delta_{il} (N-1)! \delta_{jk} = \frac{1}{N} \delta_{il} \delta_{jk}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Hierbei ist  $N = N_c$  die Anzahl der Farb-Freiheitsgrade.

### A.2.5. Die statische Quark-Determinante

Mit dem Integrationsmaß und den zuvor diskutierten Link-Integralen liegen die wichtigsten Hilfsmittel vor, um zwei fundamentale Größen in der effektiven Fermion-Theorie ermitteln zu können, nämlich die *statische Quark-Determinante* für 1-Flavor Kogut-Susskind-Fermionen und die sogenannten *Knoten-Funktionen*  $W_{nm}$ , die aus wechselwirkenden Loop-Termen bestehen. Die Knoten-Funktionen werden in Abschnitt (A.2.7) näher betrachtet. In diesem Abschnitt wird der Fokus auf die Herleitung der statischen Quark-Determinante gerichtet,

$$\det(Q_{\text{stat}}) = \prod_{\vec{x}} \det(1 + h_1 W(\vec{x})) \det(1 + \bar{h}_1 W^\dagger(\vec{x})). \quad (\text{A.34})$$

Da die in Gl.(A.34) auftretenden Faktoren unabhängige Größen darstellen, genügt es, eine dieser Determinanten - hier  $\det(1 + h_1 W(\vec{x}))$  - zu ermitteln, wobei  $W \in SU(N)$  vorausgesetzt wird. Die Determinante kann mit der *Trace-Log-Identität*, sowie mit der *Mercator-Reihe* folgendermaßen dargestellt werden (siehe auch [Wissel; 2002]):

$$\det(1 + h_1 W(\vec{x})) = \sum_{n=0}^N \sum_{\{k_i\}_n} \prod_{l=1}^N \frac{(-1)^{(l+1)k_l}}{l^{k_l} k_l!} h_1^{l k_l} \text{tr}(W^l)^{k_l}. \quad (\text{A.35})$$

$SU(N)$	$\det(1 + h_1 W)$
$N = 1$	$1 + h_1$
$N = 2$	$1 + h_1^2 + h_1 \chi_1$
$N = 3$	$1 + h_1^3 + h_1 \chi_1 + \frac{1}{2} h_1^2 (\chi_1^2 - \chi_2)$
$N = 4$	$1 + h_1^4 + h_1 \chi_1 + \frac{1}{2} h_1^2 (\chi_1^2 - \chi_2) + \frac{1}{6} h_1^3 (\chi_1^3 - 3\chi_1 \chi_2 + 2\chi_3)$
$N = 5$	$1 + h_1^5 + h_1 \chi_1 + \frac{1}{2} h_1^2 (\chi_1^2 - \chi_2) + \frac{1}{6} h_1^3 (\chi_1^3 - 3\chi_1 \chi_2 + 2\chi_3) + \frac{1}{24} h_1^4 (\chi_1^4 - 6\chi_1^2 \chi_2 + 3\chi_2^2 + 8\chi_1 \chi_3 - 6\chi_4)$

**Tab. 3:** In dieser Tabelle sind Resultate für den Faktor  $\det(1 + h_1 W)$  der statischen Quark-Determinante für die  $SU(N)$ -Algebra ( $N = 1, \dots, 5$ ) aufgelistet. Die darin auftretenden, unabhängigen Charaktere lauten  $\chi_i = \text{tr}(U^i)$ .

Dabei erfolgt die Summe über die Indexmenge  $\{k_i\}_n$ , die die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$\sum_{i=1}^N k_i = n, \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^N i k_i \leq N. \quad (\text{A.36})$$

Der höchste Ordnungsterm der Mercator-Reihe wird durch die Identität  $\det W = 1$  eliminiert, sodass das Cayley-Hamilton-Theorem (Gl.(A.14)) verwendet werden kann. In Tabelle 3 liegen Resultate für die statische Quark-Determinante der  $SU(N = 1 \rightarrow 5)$ -Algebra vor.

Mit der Mercator-Reihe ist ein möglicher Ansatz zur Berechnung der statischen Quark-Determinante vorgestellt worden. Der Ausdruck für die statische Quark-Determinante in Gl.(A.34) kann alternativ - zumindest für Wilson-Fermionen - über die *s-Resummations-Methode* hergeleitet werden (siehe [Stamatescu, Seiler; 2016]).

### A.2.6. Der symmetrische $A$ -Term aus Gl.(2.27) in Abhängigkeit von $\kappa_\tau$

Wie bereits in Abschnitt 2.3.1 erläutert, kann die statische Quark-Determinante in  $0 + 1$ -Dimensionen für gerade  $N_\tau$  auf die Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix reduziert werden (siehe [Bloch, Bruckmann; 2013], [Demeterfi, Bilic; 1988]):

$$\det(Q_{\text{stat.}}) = \det_c(A \mathbf{1}_{3 \times 3} + e^{\frac{\mu}{T}} \text{tr}_c W_{\vec{x}} + e^{-\frac{\mu}{T}} \text{tr}_c W_{\vec{x}}^\dagger). \quad (\text{A.37})$$

Dabei ist

$$A = 2 \cosh(\mu_c / T) \quad (\text{A.38})$$

der symmetrische Anteil der Zustandsfunktion mit dem kritischen chemischen Potential  $a\mu_c = \text{arsinh}(am)$ , sowie  $1/T = N_\tau a$ . Mit dem Hopping-Parameter  $\kappa_\tau = \frac{1}{2am_q}$  für Kogut-Susskind-Fermionen erhält man somit:

$$A = 2 \cosh\left(N_\tau \text{arsinh}\left(\frac{1}{2\kappa_\tau}\right)\right). \quad (\text{A.39})$$

Das in Gl.(2.27) vorgestellte Resultat für die statische Quark-Determinante stimmt - bis auf den konstanten Faktor  $\frac{1}{2^{3N_\tau}}$  und dass in Gl.(2.21) nur die höchsten  $\kappa_\tau^{N_\tau}$ -Potenzen aus der  $\kappa_\tau \rightarrow 0$ -Entwicklung von Gl.(2.25) berücksichtigt werden - vollständig mit dem Resultat in Gl.(2.21) überein (siehe [Bloch, Bruckmann; 2013], [Demeterfi, Bilic; 1988]). Dies wird in diesem Abschnitt nun gezeigt.

Dazu wurde zunächst mit *Mathematica* der  $A$ -Term in Abhängigkeit von  $\kappa_\tau$  ausgedrückt. Ausgehend von Gl.(2.25) und mit  $x \equiv \frac{1}{2\kappa_\tau}$  wird der Ausdruck für  $A$  sowohl im **chiralen Limes** (das bedeutet für  $m_q \rightarrow 0$  bzw.  $x \rightarrow 0$ ), als auch im relevanten Fall schwerer Quarks ( $m_q \rightarrow \infty$  bzw.  $x \rightarrow \infty$ ), dem **Heavy-Quark-Mass-Regime**, untersucht. Man erhält:

$$A = 2 \cosh \left( N_\tau \operatorname{arsinh} \left( \underbrace{\frac{1}{2\kappa_\tau}}_{\equiv x} \right) \right) = \left( \sqrt{x^2 + 1} + x \right)^{-N_\tau} + \left( \sqrt{x^2 + 1} + x \right)^{N_\tau}$$

$$= \begin{cases} 2 + N_\tau^2 x^2 + \frac{1}{12} N_\tau^2 (N_\tau^2 - 4) x^4 + \dots & \text{im chiralen Limes} \\ (\kappa_\tau^{N_\tau} + \kappa_\tau^{-N_\tau}) \left[ 1 - N_\tau \kappa_\tau^2 + \frac{1}{2} N_\tau (N_\tau + 3) \kappa_\tau^4 - \frac{1}{6} N_\tau (N_\tau^2 + 9N_\tau + 20) \kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{24} N_\tau (N_\tau^3 + 18N_\tau^2 + 107N_\tau + 210) \kappa_\tau^8 + \dots \right] & \text{für schwere Quarks} \end{cases}$$

Es werden nun die Potenzen von  $A$  (bis zur 3. Ordnung) für beide Grenzfälle angegeben,

$$A^2 = \begin{cases} 4 + 4N_\tau^2 x^2 + \frac{1}{3} N_\tau^2 (N_\tau^2 - 4) x^4 + \frac{1}{6} N_\tau^4 (N_\tau^2 - 4) x^6 + \frac{1}{144} N_\tau^4 (N_\tau^2 - 4) x^8 + \dots & \text{für } m_q \rightarrow 0 \\ \kappa_\tau^{-2N_\tau} \left[ 1 + 2N_\tau \kappa_\tau^2 + 2N_\tau (N_\tau - \frac{3}{2}) \kappa_\tau^4 + \frac{1}{3} N_\tau (4N_\tau^2 - 18N_\tau^2 + 20) \kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} N_\tau (2N_\tau^3 - 18N_\tau^2 + \frac{107}{2} N_\tau - \frac{105}{2}) \kappa_\tau^8 + \frac{1}{4} N_\tau^2 (N_\tau^3 - 14N_\tau^2 + 67N_\tau - 110) \kappa_\tau^{10} \right. \\ \left. + \frac{1}{72} N_\tau^2 (5N_\tau^4 - 99N_\tau^3 + 725N_\tau^2 - 2313N_\tau + 2690) \kappa_\tau^{12} + \dots \right] \\ + \kappa_\tau^{2N_\tau} \left[ 1 - 2N_\tau \kappa_\tau^2 + 2N_\tau (N_\tau + \frac{3}{2}) \kappa_\tau^4 - \frac{1}{3} N_\tau (4N_\tau^2 + 18N_\tau + 20) \kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{3} N_\tau (2N_\tau^3 + 18N_\tau^2 + \frac{107}{2} N_\tau + \frac{105}{2}) \kappa_\tau^8 - \frac{1}{4} N_\tau^2 (N_\tau^3 + 14N_\tau^2 + 67N_\tau + 110) \kappa_\tau^{10} \right. \\ \left. + \frac{1}{72} N_\tau^2 (5N_\tau^4 + 99N_\tau^3 + 725N_\tau^2 + 2313N_\tau + 2690) \kappa_\tau^{12} + \dots \right] \\ + 2 + N_\tau^2 (N_\tau^2 + 55) \kappa_\tau^{10} + \frac{1}{36} N_\tau^2 (N_\tau^4 + 241N_\tau^2 - 2690) \kappa_\tau^{12} + \dots & \text{für } m_q \rightarrow \infty \end{cases}$$

sowie

$$A^3 = \begin{cases} 8 + 12N_\tau^2 x^2 + 7N_\tau^2 (N_\tau^2 - \frac{4}{7}) x^4 + 2N_\tau^4 (N_\tau^2 - 2) x^6 + \frac{1}{24} N_\tau^4 (7N_\tau^4 + 32N_\tau^2 + 16) x^8 + \dots & \text{für } m_q \rightarrow 0 \\ (\kappa_\tau^{+3N_\tau} + \kappa_\tau^{-3N_\tau}) \left[ 1 + 3N_\tau \kappa_\tau^2 + \frac{9}{2} N_\tau (N_\tau - 1) \kappa_\tau^4 - \frac{1}{2} N_\tau (9N_\tau^2 + 27N_\tau + 20) \kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{8} N_\tau (27N_\tau^3 + 162N_\tau^2 + 321N_\tau + 210) \kappa_\tau^8 - \frac{1}{2} N_\tau^2 (4N_\tau^3 + 39N_\tau^2 + 134N_\tau + 165) \kappa_\tau^{10} \right. \\ \left. + \frac{1}{24} N_\tau^2 (23N_\tau^4 + 324N_\tau^3 + 1691N_\tau^2 + 3744N_\tau + 2690) \kappa_\tau^{12} + \dots \right] \\ + (\kappa_\tau^{N_\tau} + \kappa_\tau^{-N_\tau}) \left[ 3 - 9N_\tau \kappa_\tau^2 + \frac{27}{2} N_\tau (N_\tau + 1) \kappa_\tau^4 - \frac{1}{2} N_\tau (27N_\tau^2 + 81N_\tau + 60) \kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{8} N_\tau (81N_\tau^3 + 486N_\tau^2 + 963N_\tau + 630) \kappa_\tau^8 - \frac{1}{2} N_\tau^2 (12N_\tau^3 + 117N_\tau^2 + 402N_\tau + 495) \kappa_\tau^{10} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} N_\tau^2 (23N_\tau^4 + 324N_\tau^3 + 1691N_\tau^2 + 3744N_\tau + 2690) \kappa_\tau^{12} + \dots \right] & \text{für } m_q \rightarrow \infty \end{cases}$$

Daraus ergibt sich der in Gl.(2.27) auftretende konstante Faktor ohne implizite  $\mu$ -Abhängigkeit

$$A^3 - 3A = \begin{cases} 2 + 9N_\tau^2 x^2 + \frac{1}{4}N_\tau^2(27N_\tau^2 - 12)x^4 + \dots & \text{für } m_q \rightarrow 0 \\ (\kappa_\tau^{+3N_\tau} + \kappa_\tau^{-3N_\tau}) \left[ 1 + 3N_\tau \kappa_\tau^2 + \frac{9}{2}N_\tau(N_\tau - 1)\kappa_\tau^4 - \frac{1}{2}N_\tau(9N_\tau^2 + 27N_\tau + 20)\kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{8}N_\tau(27N_\tau^3 + 162N_\tau^2 + 321N_\tau + 210)\kappa_\tau^8 - \frac{1}{2}N_\tau^2(4N_\tau^3 + 39N_\tau^2 + 134N_\tau + 165)\kappa_\tau^{10} \right. \\ \left. + \frac{1}{24}N_\tau^2(23N_\tau^4 + 324N_\tau^3 + 1691N_\tau^2 + 3744N_\tau + 2690)\kappa_\tau^{12} + \dots \right] \\ + (\kappa_\tau^{N_\tau} + \kappa_\tau^{-N_\tau}) \left[ -6N_\tau \kappa_\tau^2 + 3N_\tau(4N_\tau + 3)\kappa_\tau^4 - N_\tau(13N_\tau^2 + 36N_\tau + 20)\kappa_\tau^6 \right. \\ \left. + \frac{1}{2}N_\tau(20N_\tau^3 + 117N_\tau^2 + 214N_\tau + 105)\kappa_\tau^8 + \mathcal{O}(\kappa_\tau^{10}) \right] & \text{für } m_q \rightarrow \infty \end{cases}$$

Anschließend wird das Produkt der  $SU(3)$ -Determinanten in Gl.(2.21) berechnet und mit den Termen in Gl.(2.27) verglichen:

$$\begin{aligned} & [1 + h_1 L_{\bar{x}} + h_1^2 L_{\bar{x}}^\dagger + h_1^3] [1 + \bar{h}_1 L_{\bar{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\bar{x}} + \bar{h}_1^3] = (1 + h_1^3 + \bar{h}_1^3 + \bar{h}_1^3 h_1^3) \\ & + L_{\bar{x}}^\dagger (\bar{h}_1 + h_1^2 + \bar{h}_1^3 h_1^3 + \bar{h}_1 h_1^3) + L_{\bar{x}} (h_1 + \bar{h}_1^2 + \bar{h}_1^3 h_1^3 + \bar{h}_1^3 h_1) + L_{\bar{x}}^\dagger L_{\bar{x}} (\bar{h}_1 h_1 + \bar{h}_1^2 h_1^2) \\ & + \bar{h}_1^2 h_1 L_{\bar{x}}^2 + \bar{h}_1 h_1^2 (L_{\bar{x}}^\dagger)^2. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Mit  $h_1 = (\kappa_\tau e^{a\mu})^{N_\tau}$  und  $\bar{h}_1 = (\kappa_\tau e^{-a\mu})^{N_\tau}$  erhält man z.B. für den konstanten Teil von Gl.(A.40):

$$\begin{aligned} 1 + h_1^3 + \bar{h}_1^3 + \bar{h}_1^3 h_1^3 &= 1 + \kappa_\tau^{6N_\tau} + \kappa_\tau^{3N_\tau} (e^{3a\mu N_\tau} + e^{-3a\mu N_\tau}) \\ &= \kappa_\tau^{3N_\tau} \left( \underbrace{\kappa_\tau^{3N_\tau} + \kappa_\tau^{-3N_\tau}}_{\substack{\doteq \text{höchste Ordnung von } A^3 - 2A \\ \text{im Heavy-Quark-Mass-Regime}}} + 2\cosh(3a\mu N_\tau) \right) \end{aligned}$$

Auf analoge Weise können die übrigen Koeffizienten in Gl.(A.40) mit den höchsten  $\kappa_\tau$ -Ordnungen von  $A$  identifiziert werden. Somit ist die Äquivalenz von Gl.(2.27) und Gl.(2.21) im **Heavy-Quark-Mass-Regime** bewiesen.

### A.2.7. Die Knoten-Funktion $W_{nm}$

Die letzte gruppen-abhängige Größe ist die *Knoten-Funktion*  $W_{nm}$ , die in der effektiven Theorie eine zentrale Bedeutung hat. Für  $n, m \in \mathbb{N}$  sind diese folgendermaßen definiert:

$$W_{nm} = \text{tr} \frac{(h_1 W)^m}{(1 + h_1 W)^n}. \quad (\text{A.41})$$

Die Knoten-Funktion kann also über Charaktere - und damit über Polyakov-Loops - ausgedrückt werden. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, diese Größe zu berechnen. Zunächst kann der Nenner-Term in Gl.(A.41) durch eine Reihen ausgedrückt werden,

$$W_{nm} = \text{tr} \left( (h_1 W)^m \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{k} (-h_1 W)^k \right). \quad (\text{A.42})$$

Alternativ kann die  $W_{nm}$ -Funktion direkt als Linear-Kombination unabhängiger Charaktere dargestellt werden,

$$W_{nm} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \text{tr} W^i. \quad (\text{A.43})$$

Die Koeffizienten  $a_i$  können mit der zuvor erwähnten Reihendarstellung und dem Cayley-Hamilton-Theorem ermittelt werden.

Eine dritte Möglichkeit besteht darin, ein generierendes Funktional zu konstruieren. Hierbei erweist sich die statische Quark-Determinante als geeignetes Funktional zur Herleitung der Knoten-Funktionen,

$$G(\alpha, \beta) = \log \det(\alpha + \beta h_1 W). \quad (\text{A.44})$$

Durch Differentiation des Funktionals nach den Parametern  $\alpha, \beta$  erhält man

$$W_{nm} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{(n-m)}}{\partial \alpha^{(n-m)}} \frac{\partial^m}{\partial \beta^m} G(\alpha, \beta) \Big|_{\alpha=\beta=1}. \quad (\text{A.45})$$

Bei der Berechnung der Zustandssumme  $\mathcal{Z}_2^{\text{stagg}}$  tritt der Spezialfall  $n, m = 1$  auf:

$$W_{11}(\vec{x}) \equiv \text{tr}_c \left( \frac{h_1 W_{\vec{x}}}{1 + h_1 W_{\vec{x}}} \right) \stackrel{N_c=3}{=} \frac{h_1 L_{\vec{x}} + 2h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + 3h_1^3}{1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3} \quad (\text{A.46})$$

$$\bar{W}_{11}(\vec{x}) \equiv \text{tr}_c \left( \frac{\bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger}{1 + \bar{h}_1 W_{\vec{x}}^\dagger} \right) \stackrel{N_c=3}{=} \frac{\bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + 2\bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + 3\bar{h}_1^3}{1 + \bar{h}_1 L_{\vec{x}}^\dagger + \bar{h}_1^2 L_{\vec{x}} + \bar{h}_1^3}. \quad (\text{A.47})$$

Um den Appendix abzuschließen, werden einige Ergebnisse von Integralen der Form

$$\int dW \det Q_{\text{stat}}^{N_f} W_{n_1 m_1}^{k_1} \cdots W_{n_p m_p}^{k_p}, \quad n_i, m_i \in \mathbb{N}, \quad k_i \in \mathbb{N}_0 \quad \forall i = 1, \dots, p \quad (\text{A.48})$$

für  $N_f = 1, 2$ -Flavor Wilson-Fermionen im **Heavy-Dense-Regime** vorgestellt (d.h., dass die Anti-Quarks in den Resultaten vernachlässigt werden,  $\bar{h}_1 \rightarrow 0$ ). Diese Terme bestehen aus der statischen Quark-Determinante und Potenzen der Knoten-Funktion  $W_{11}$  und sind für die Berechnung von  $\mathcal{Z}_2$  und  $n$ -Punkt-Funktionen relevant (siehe [Glesaaen; 2016]).

Für  $N_f = 1$  Flavor erhält man mit der statischen Quark-Determinante für Wilson-Fermionen im Heavy-Dense-Grenzfall

$$\det Q_{\text{stat}} = \prod_x (1 + h_1 L_{\vec{x}} + h_1^2 L_{\vec{x}}^\dagger + h_1^3)^2 \quad (\text{A.49})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}} = 1 + 4h_1^3 + h_1^6, \quad (\text{A.50a})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}} W_{11} = 6h_1^3 + 3h_1^6, \quad (\text{A.50b})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}} W_{11}^2 = 4h_1^3 + 9h_1^6, \quad (\text{A.50c})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}} W_{11}^3 = h_1^3 + 17h_1^6 + h_1^9, \quad (\text{A.50d})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}} W_{11}^4 = 21h_1^6 + 6h_1^9. \quad (\text{A.50e})$$

Für  $N_f = 2$  Flavor erhält man schließlich:

$$\int dW \det Q_{\text{stat}}^2 = 1 + 20h_1^3 + 50h_1^6 + 20h_1^9 + h_1^{12}, \quad (\text{A.51a})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}}^2 W_{11} = 15h_1^3 + 75h_1^6 + 45h_1^9 + 3h_1^{12}, \quad (\text{A.51b})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}}^2 W_{11}^2 = 6h_1^3 + 95h_1^6 + 96h_1^9 + 9h_1^{12}, \quad (\text{A.51c})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}}^2 W_{11}^3 = h_1^3 + 90h_1^6 + 188h_1^9 + 27h_1^{12}, \quad (\text{A.51d})$$

$$\int dW \det Q_{\text{stat}}^2 W_{11}^4 = 60h_1^6 + 312h_1^9 + 81h_1^{12}. \quad (\text{A.51e})$$

# Literatur

[Gross, Wilczek; 1973]: D. J. Gross, F. Wilczek; Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories; Physical Review Letters; 30(26): 1343-1346; doi:10.1103/PhysRevLett.30.1343; 1973

[Philipsen et al.; 2015]: O. Philipsen, M. Neuman, J. Glesaaen; Heavy dense QCD from a 3d effective lattice theory; published in PoS LATTICE2015 (2016) 173; doi:10.22323/1.251.0173; e-Print: arxiv:1511.00967 [hep-lat]; 14 Seiten; 3. November 2015; siehe auch: <https://th.physik.uni-frankfurt.de/philipsen/index.html> - zuletzt besucht am: 28.09.2018

[Langelage; 2009]: J. Langelage; Phase transitions in finite temperature lattice QCD from strong coupling expansions; Münster; 2009

[Peskin, Schröder; 1995]: M. E. Peskin and D. V. Schroeder; An Introduction To Quantum Field Theory; Frontiers in physics. Westview Press; 1995; ISBN 9780813345437.

[Kogut, Susskind; 1975]: J. Kogut, L. Susskind; Phys. Rev D11 (1975) 395; T. Banks, J. Kogut, L. Susskind; Phys. Rev D13 (1976) 1043; L. Susskind; Phys. Rev D16 (1977) 3031.

[Kluberg-Stern et al.; 1983]: H. Kluberg-Stern, A. Morel, O. Napoly, B. Petersson; Nucl. Phys. B220 (1983) 447.

[Creutz; 1978b]: M. Creutz; On Invariant Integration Over SU(N); J. Math. Phys.; 19:2043; 1978b. doi:10.1063/1.523581.

[Fromm et al., 2012]: M. Fromm, J. Langelage, S. Lottini, and O. Philipsen; The QCD deconfinement transition for heavy quarks and all baryon chemical potentials; JHEP; 01:042; 2012; doi: 10.1007/JHEP(2012)042.

[Christensen et. al.; 2015]: A. S. Christensen, J. C. Myers, P. D. Pedersen, and J. Rosseel; Calculating the chiral condensate of QCD at infinite coupling using a generalised lattice diagrammatic approach; JHEP; 03:068; 2015; doi: 10.1007/JHEP03(2015)068.

[Montvay, Münster; 1997]: I. Montvay and G. Münster; Quantum Fields on a Lattice; Cambridge Monographs on Mathematical Physics; Cambridge University Press; 1997; ISBN 9780521599177.

[Glesaaen; 2016]: J. R. Glesaaen; Heavy quark QCD at Finite Temperature and Density Using an Effective Theory; Dissertation; Frankfurt am Main; 2016

[Morozov; 2008]: A. Morozov, Sh. Shakirov; Analogue of the identity Log Det = Trace

Log for resultants; ITEP, Moscow, Russia; arxiv:0804.4632v3 [math-ph]; 2008; S. 3

[Sciarra; 2016]: A. Sciarra; The QCD phase diagram at purely imaginary chemical potential from the lattice; Frankfurt am Main; 2016

[Nielsen, Ninomiya; 1981]: H. B. Nielsen and M. Ninomiya; Absence of Neutrinos on a Lattice; 1. Proof by Homotopy Theory; Nucl. Phys.; B185:20; 1981a. doi: 10.1016/0550-3213(81)90361-8;  
Absence of Neutrinos on a Lattice; 2. Intuitive Topological Proof. Nucl. Phys.; B193:173; 1981b. doi: 10.1016/0550-3213(81)90524-1.

[Kaplan; 1992]: D. B. Kaplan; Phys. Lett. B 288; 1992; S. 342

[Neuberger; 1998]: H. Neuberger; Phys. Lett. B 417; 1998; S. 141

[Creutz; 2008]: M. Creutz; JHEP 0804; 2008; S. 17

[Langelage; 2011]: J. Langelage, S. Lottini, and O. Philipsen; Centre symmetric 3d effective actions for thermal SU(N) Yang-Mills from strong coupling series; JHEP, 02:057; 2011; doi: 10.1007/JHEP07(2011)014,10.1007/JHEP02(2011)057. [Erratum: JHEP07,014(2011)]

[Langelage; 2014]: J. Langelage, M. Neuman, and O. Philipsen; Heavy dense QCD and nuclear matter from an effective lattice theory; JHEP, 09:131, 2014. doi: 10.1007/JHEP09(2014)131.

[Gattringer, Lang; 2008]: C. Gattringer and C. Lang; Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation. Lecture Notes in Physics; Springer Berlin Heidelberg; 2009; ISBN 9783642018497.

[Stamatescu, Seiler; 2016]: I.-O. Stamatescu and E. Seiler; Discussion of the loop formula for the fermionic determinant; 34th annual International Symposium on Lattice Field Theory; University of Southampton, UK; 2016; arxiv:1611.00620v1

[Bloch, Bruckmann; 2013]: J. Bloch, F. Bruckmann and T. Wettig; Subset method for one-dimensional QCD; Institute for Theoretical Physics, University of Regensburg; 93040 Regensburg, Germany; 2013; arxiv: 1307.1416v2

[Demeterfi, Bilic; 1988]: N. Bilic and K. Demeterfi; One-dimensional QCD With Finite Chemical Potential; Phys. Lett. B 212 (1988) 83

[Rindlisbacher; 2018]: T. Rindlisbacher and P. de Forcrand; Two-Flavor Lattice QCD with a Finite Density of Heavy Quarks: Heavy-Dense Limit and "Particle-Hole" Symmetry; ETH Zürich, Institute for Theoretical Physics; Zürich, Switzerland;

2018; arxiv:1509.00087v2

[OEIS; 2011]: OEIS Foundation Inc. OEIS. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences; <http://oeis.org>, 2011; zuletzt besucht am 22. Mai 2018

[Unger; 2014]: W. Unger; Combinatorics of Lattice QCD at Strong Coupling; PoS, LATTICE2014:192; 2014

[Wissel; 2002]: S. Wissel; Die graphische Charakter- und Hoppingparameterentwicklung der  $N=1$   $SU(2)$ -Super-Yang-Mills-Theorie in  $d$  Dimensionen; Institut für Theoretische Physik der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster; 2002; <https://www.uni-muenster.de/Physik.TP/archive/fileadmin/Arbeiten/wissel.pdf> - zuletzt besucht am 22. Mai 2018

[Salmhofer; 1991]: M. Salmhofer, Nucl. Phys. B 362 (1991) 641.

[Scharnhorst; 1996]: K. Scharnhorst, Nucl. Phys. B 479 (1996) 727.

[Fromm; 2010]: M. Fromm; Lattice QCD at strong coupling: Thermodynamics and nuclear physics; Dissertation submitted to ETH Zürich for the degree of Doctor of Sciences; Tübingen, Germany; 2010

[Rossi, Wolff; 1984]: P. Rossi, U. Wolff; Lattice QCD with fermions at strong coupling: A dimer system; Volume 248, Issue 1; Newman Laboratory, Cornell University, Ithaca, NY 14853; 1984; S. 105-122

[Karsch, Mütter; 1989]: F. Karsch, K.-H. Mütter; Strong Coupling QCD at finite baryon-number density; Journal Article, PUB-ID: 1784395; Nuclear Physics, B 313(3); 1989; S. 541-559

[Greensite; 2003]: J. Greensite. The confinement problem in lattice gauge theory. Prog. Part. Nucl. Phys., 51:1, 2003, hep-lat/0301023.

[Pisarski; 2003]: Robert D. Pisarski. Notes on the deconfining phase transition. 2002, hep-ph/0203271.

[Eriksson, Svartholm; 1981]: K. E. Eriksson; N. Svartholm; B. S. Skagerstam; On invariant group integrals in lattice QCD; Journal of Mathematical Physics, Volume 22, Issue 10, S. 2276-2278; doi: 10.1063/1.524760; American Institute of Physics; 1981

[Brower, Nauenberg; 1981]: R. Brower, M. Nauenberg; Group Integration for lattice gauge theory at large  $N$  and small coupling; Nucl. Phys. B, Volume 180, Issue 2, S. 221-247; doi: 10.1016/0550-3213(81)90416-8; 1981

## A. Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt wurde. Die aus den Quellen direkt oder indirekt übernommenen Gedanken sind als solche gekennzeichnet.

---

Ort, Datum

---

Name