

**Übungen zur Theoretischen Physik III (Statistische Mechanik)**

**WS 2015/2016**

**Blatt 6**

**Aufgabe 17: Gitterschwingungen, mikrokanonisch (4 Punkte)**

Betrachten Sie als ein Modell für die Gitterschwingungen in einem Festkörper ein System aus  $M$  unterscheidbaren harmonischen Oszillatoren, die ungekoppelt sind und alle die gleiche Frequenz  $\omega$  besitzen (das sogenannte Einstein-Modell). Der Hamiltonoperator dieses Systems ist dann

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^M \hbar\omega \left( \hat{n}_i + \frac{1}{2} \right),$$

wobei  $\hat{n}_i$  der Besetzungszahloperator des  $i$ -ten Oszillators ist. Die Gesamtzahl der Quanten (und somit die Gesamtenergie) sei durch  $N = \sum_{i=1}^M n_i$  gegeben.

a) Zeigen Sie, dass die Gesamtzahl der Zustände  $\Omega$  mit Energie  $E$  gegeben ist durch

$$\Omega = \binom{M-1+N}{N}$$

wobei  $N$  eine Funktion der Energie ist. (1 P.)

b) Berechnen Sie die Entropie  $S$  mikrokanonisch als Funktion der Temperatur  $T$  und der Gesamtzahl  $M$  der Oszillatoren. Nehmen Sie dabei an,  $N$  und  $M$  seien hinreichend groß, so dass die Stirling Formel in der vereinfachten Form

$$\log(N!) \simeq N \log N - N$$

benutzt werden kann. Zeigen Sie, dass sich folgender Ausdruck für die Entropie ergibt:

$$S = k_B M \left[ -\ln(1 - e^{-x}) + \frac{x}{e^x - 1} \right]$$

mit  $x = \frac{\hbar\omega}{k_B T}$ . (3 P.)

**Aufgabe 18: Gitterschwingungen, großkanonisch (6 Punkte)**

a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme  $Z_{GK}$  und das großkanonische Potential  $\Phi(\mu, T)$  für das System aus Aufgabe 17. (2 P.)

b) Bestimmen Sie die Entropie mit Hilfe der Relation

$$S = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right)_{\mu}.$$

Für welchen Wert von  $\mu$  stimmt dieser Ausdruck mit dem aus Aufgabe 17 b) überein? Begründen Sie den gefundenen Wert von  $\mu$ . (2 P.)

Bitte Rückseite beachten!

c) Berechnen Sie die Wärmekapazität  $C$  dieses Festkörpers. Skizzieren Sie die Temperaturabhängigkeit  $C(T)$ . Wie verhält sich  $C(T)$  im Limes  $T \rightarrow \infty$ ? Welches Resultat ergibt sich aus dem Gleichverteilungssatz? (2 P.)

**Aufgabe 19: Zweidimensionale Quantengase (5 Punkte)**

Berechnen Sie das chemische Potential  $\mu(T, N, V)$  für ein Fermi- und Bose-Gas in einem zweidimensionalen Kastenpotential im Rahmen des großkanonischen Ensembles.

*Besprechung am 2.12.2015.*