

Übungen zur Theoretischen Physik III (Statistische Mechanik)
WS 2015/2016 **Blatt 4**

Aufgabe 11: Wärmekapazität (5 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Wärmekapazität C_V bei festgehaltenem Volumen gegeben ist durch

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,N}$$

- (a) Zeigen Sie, dass C_V auch durch die Änderung des Erwartungswertes der Gesamtenergie $E = \langle H \rangle$ eines Systems mit der Temperatur T bestimmt werden kann:

$$C_V = \left(\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T} \right)_{V,N}$$

(1 P.)

- (b) Zeigen Sie im kanonischen Ensemble, dass folgender Zusammenhang zwischen der Wärmekapazität C_V und der mittleren quadratischen Schwankung der Energie H besteht:

$$k_B T^2 C_V = \langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2 .$$

Wie verhält sich die *relative* Schwankung der Energie $\sqrt{\langle H^2 \rangle - \langle H \rangle^2} / \langle H \rangle$ für große Teilchenzahlen N ? Beachten Sie, dass sowohl C_V als auch $\langle H \rangle$ extensive Größen, d.h. proportional zur Teilchenzahl, sind. Kann C_V negativ werden ? (4 P.)

Aufgabe 12: Kanonische Zustandssumme (3 Punkte)

Der Hamiltonoperator eines Systems bestehe aus einer Summe zweier miteinander kommutierender Operatoren, d.h.

$$H = H_1 + H_2 \quad \text{mit} \quad [H_1, H_2] = 0$$

Die beiden Operatoren H_1 und H_2 sollen auf verschiedene Teilchenkoordinaten wirken. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die kanonische Zustandssumme $Z = \text{Sp} e^{-\beta H}$ des Systems gerade das Produkt der kanonischen Zustandssummen von H_1 bzw. H_2 ist, d.h. $Z = Z_1 \cdot Z_2$.

Aufgabe 13: mikrokanonisch vs. kanonisch (8 Punkte)

Betrachten Sie das System von N nicht wechselwirkenden Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchen in einem äußeren Magnetfeld B aus Aufgabe 7, allerdings nun im kanonischen Ensemble. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- (a) Berechnen Sie für gegebene Temperatur $\beta = 1/k_B T$ die kanonische Zustandssumme $Z = \text{Sp} e^{-\beta H}$. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Zustandssumme die Energie $E = \langle H \rangle$ als Funktion der Temperatur und vergleichen Sie das Resultat mit Aufgabe 7. (3 P.)

- (b) Berechnen Sie für die kanonische Gesamtheit die Entropie gemäß $S = -k_B \text{Sp}(\rho \ln \rho)$ mit $\rho = e^{-\beta H}/Z$ und vergleichen Sie mit Aufgabe 7. (3 P.)
- (c) Berechnen Sie die Wärmekapazität $C = \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial T}$ und skizzieren Sie ihre Temperaturabhängigkeit. (2 P.)

Besprechung am 18.11.2015.