Universität Bielefeld
Prof. Dr. Thomas Dahm

Bielefeld, den 2.11.2015

Übungen zur Theoretischen Physik III (Statistische Mechanik)

WS 2015/2016 Blatt 3

Aufgabe 8: Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung (5 Punkte)

Die Atome eines idealen Gases haben die Masse m und befinden sich in einem Behälter mit Volumen V. Das Gas befindet sich im thermischen Gleichgewicht bei der Temperatur T. Die Geschwindigkeitsverteilung der Atome ist dann durch die Maxwell-Verteilung

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}\right]$$

gegeben, wobei $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ die Geschwindigkeit eines Atoms bezeichnet. Berechnen Sie die folgenden Mittelwerte der Maxwell-Verteilung

(a) $\langle v_x \rangle$ (1 P.)

(b) $\langle v_x^2 \rangle$ (2 P.)

(c) $\left\langle \frac{1}{|\vec{v}|} \right\rangle$. (1 P.)

(d) $\langle |\vec{v}| \rangle^{-1}$ und vergleichen Sie mit dem Resultat aus (c). (1 P.)

Hierbei ist $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ der Betrag der Geschwindigkeit. Der Mittelwert einer Größe $A(\vec{v})$ in der Maxwell-Verteilung ist gegeben durch $\langle A(\vec{v}) \rangle = \int d^3v\, f(\vec{v}) A(\vec{v})$.

Aufgabe 9: Druckverlust (4 Punkte)

Betrachten Sie einen Behälter mit Volumen V, der mit einem idealen Gas mit Druck P und Temperatur T gefüllt sei. Jemand macht zum Zeitpunkt $t = 0$ ein kleines Loch mit Querschnittsfläche Q in die Wand des Behälters. Zu jedem Zeitpunkt gelte die Zustandsgleichung des idealen Gases $P(t)V = N(t)k_B T$, d.h. die Temperatur sei zeitlich konstant. Außerhalb des Behälters sei der Druck gleich Null. Nach welcher Zeit τ wird der Druck im Behälter auf $1/e$ seines ursprünglichen Wertes abgefallen sein? Welcher Wert ergibt sich für τ, wenn es sich um einen mit Stickstoff gefüllten Behälter der Temperatur $T = 300$ K mit einem Volumen von 1 Liter handelt und das Loch eine Querschnittsfläche von $Q = 1$ mm^2 hat? *Hinweis:* Verwenden Sie die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung zur Bestimmung des austretenden Teilchenstroms.

Aufgabe 10: (4 Punkte)

$\hat{A}$ sei ein beliebiger hermitescher Operator. Der statistische Erwartungswert von $\hat{A}$ ist gegeben durch

$$\langle \hat{A} \rangle = \mathrm{Sp}(\hat{\rho}\hat{A}),$$

wobei $\hat{\rho} = \sum_i p_i \, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ die Dichtematrix ist. Zeigen Sie, dass immer gilt

$$\langle \hat{A}^2 \rangle \geq \langle \hat{A} \rangle^2.$$

Hinweis: zeigen Sie, dass der statistische Erwartungswert des Quadrats des Operators $\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{1}$ immer positiv ist.

Besprechung am 11.11.2015.