Universität Bielefeld
Prof. Dr. Thomas Dahm Bielefeld, den 26.10.2015

Übungen zur Theoretischen Physik III (Statistische Mechanik)
WS 2015/2016 Blatt 2

Aufgabe 5: Bedingte Wahrscheinlichkeit (2 Punkte)

17 Kinder gehen wandern. 6 verlaufen sich, 9 bekommen einen Sonnenbrand und 7 kommen ohne Probleme nach Hause.
(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, das einen Sonnenbrand bekam, sich verlief? (1 P.)
(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind, das sich verlief, einen Sonnenbrand bekam? (1 P.)

Aufgabe 6: Volumen einer hochdimensionalen Kugel (3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass das Volumen einer Kugel mit Radius R in d Dimensionen gegeben ist durch

$$V^{(d)}(R) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)} R^d$$

wobei $\Gamma(x) = \int_0^\infty dt\, t^{x-1} e^{-t}$ die sogenannte Gamma-Funktion ist.
Hinweis: Berechnen Sie dazu das d-dimensionale Gauß-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_d\; e^{-\left(x_1^2+x_2^2+\cdots x_d^2\right)}$$

einmal direkt und einmal in sphärischen Polarkoordinaten. (2 P.)
(b) Wie groß ist das Volumen in einer d-dimensionalen Kugelschale mit Außenradius R und Innenradius $0.99R$ im Verhältnis zum Volumen der Vollkugel? Wie groß ist der Anteil des Volumens der Kugelschale zum Volumen der Kugel in $d = 3, 10, 100, 1000$ Dimensionen? (1 P.)

Aufgabe 7: Wechselwirkungsfreie Spins (8 Punkte)

Betrachten Sie ein System von N ($N \gg 1$) nicht wechselwirkenden Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in einem äußeren Magnetfeld B. Die Teilchen können also nur zwei Zustände einnehmen: entweder parallel oder antiparallel zum Magnetfeld. Die kinetische Energie der Teilchen sei vernachlässigbar klein (z.B. magnetische Momente in einem Isolator). Der Hamiltonoperator hat dann die Form

$$H = -\sum_{i=1}^{N} mB\sigma_z^{(i)} \tag{1}$$

wobei m das magnetische Moment und σ_z die Pauli-Matrix (Operator für die z-Komponente des Spins) ist. Die Eigenwerte von H lauten

$$E_n = -(2n-N)mB$$

wobei n die Anzahl der zum Feld parallel ausgerichteten Spins ist.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl $\Omega(E_n)$ der Zustände mit Energie E_n. (1 P.)

(b) Berechnen Sie mikrokanonisch unter Verwendung der Stirling Formel die Entropie S als Funktion von E_n. Nehmen Sie dabei an, dass sowohl n als auch $N - n$ groß sind. Zeigen Sie, dass sich für große Teilchenzahlen der Ausdruck für die Entropie in die folgende Form bringen läßt:

$$S = -k_B N \left[\alpha \ln \alpha + (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)\right]$$

wobei $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E_n}{NmB}\right)$. (2 P.)

(c) Berechnen Sie die Temperatur aus

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$$

(1 P.)

(d) Drücken Sie die Gesamtenergie E als Funktion der Temperatur T aus. (2 P.)

(e) Berechnen Sie die Magnetisierung des Systems, d.h. das gesamte magnetische Moment als Funktion von Temperatur T und Magnetfeld B. (1 P.)

(f) Die Gesamtenergie des Systems sei $E = -\frac{1}{2}NmB$. Wie hoch ist die Temperatur des Systems, wenn $m = \mu_B$ das Bohrsche Magneton ist und $B = 1$ T beträgt?

(1 P.)

Besprechung am <u>4.11.2015</u>.