Universität Bielefeld, Prof. Dr. Thomas Dahm   Bielefeld, den 18.06.2015

Übungen zur Theoretischen Physik II

Sommersemester 2015   Blatt 10

Aufgabe 26: Kernspinresonanz: Rabi-Oszillationen (6 Punkte)

Betrachten Sie einen Atomkern mit Spin $s = \frac{1}{2}$ und magnetischem Moment μ_K in einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$, das in z-Richtung orientiert sei. Der Kernspin befinde sich im Grundzustand $|\uparrow\rangle$ bezüglich der z-Komponente des Spins. Zur Zeit $t = 0$ werde ein zusätzliches zeitabhängiges Magnetfeld $\vec{B}_1(t) = B_1 (\vec{e}_x \cos\omega t - \vec{e}_y \sin\omega t)$ eingeschaltet, welches mit der Kreisfrequenz ω in der x-y-Ebene rotiert. Der zeitabhängige Hamiltonoperator dieses Systems ist dann gegeben durch

$$\hat{H}(t) = -\mu_K \vec{B} \cdot \vec{\sigma} = -\mu_K B_0 \sigma_z - \mu_K B_1 (\sigma_x \cos\omega t - \sigma_y \sin\omega t)$$

wobei σ_x, σ_y und σ_z die Pauli-Matrizen sind. In dieser Aufgabe soll die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung exakt gelöst werden und die Bewegung des Kernspins untersucht werden.

a) Stellen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für den Spinor $|\chi\rangle$ des Kernspins auf. Die Lösung der Schrödinger-Gleichung wird erheblich erleichtert, wenn man sie in das mit der Kreisfrequenz ω um die z-Achse mitrotierende Bezugssystem transformiert. Wenden Sie dazu die zeitabhängige unitäre Transformation $U = e^{\frac{i}{2}\omega t \sigma_z}$ auf den Spinor und den Hamiltonoperator an. Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Spinors $|\chi'\rangle = U^\dagger |\chi\rangle$ im mitrotierenden Bezugssystem durch die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\chi'\rangle = \hat{H}' |\chi'\rangle$$

mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}' = -\frac{\hbar\Omega}{2}\sigma_x + \frac{\hbar(\omega - \omega_0)}{2}\sigma_z$$

gegeben ist. Der Operator $\hat{H}'$ ist dann zeitunabhängig. Bestimmen Sie die beiden Frequenzen Ω und ω_0. (2 P.)

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenzustände von $\hat{H}'$. (1 P.)

c) Betrachten Sie im Folgenden den Resonanzfall, dass die Frequenz ω des Magnetfeldes $\vec{B}_1$ so abgestimmt wird, dass sie gerade gleich der Frequenz ω_0 ist. Berechnen Sie als Funktion der Zeit die Wahrscheinlichkeit, den Kernspin im Zustand $|\downarrow\rangle$ vorzufinden, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|\uparrow\rangle$ war. Kann diese Wahrscheinlichkeit 1 werden? (1 P.)

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte der drei Komponenten des Spins $\langle\sigma_x\rangle$, $\langle\sigma_y\rangle$ und $\langle\sigma_z\rangle$ im mitrotierenden Bezugssystem. Zu welcher Zeit $t = T$ muss man das Magnetfeld $\vec{B}_1$ abschalten, wenn der Kernspin in der x-y-Ebene orientiert sein soll? (1 P.)

e) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie als Funktion der Zeit. (1 P.)

Aufgabe 27: Klassische Hamiltonfunktion für Ladung im elektromagnetischen Feld (3 Punkte)

Die klassische Hamiltonfunktion $H(\vec{r},\vec{p},t)$ für ein geladenes Teilchen mit Ladung e im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$H(\vec{r},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + e\Phi(\vec{r},t)$$

wobei $\Phi(\vec{r},t)$ das skalare Potential und $\vec{A}(\vec{r},t)$ das Vektorpotential ist und über die Beziehungen

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(\vec{r},t) \qquad \text{und} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r},t)$$

mit dem elektrischen Feld $\vec{E}$ und dem magnetischen Feld $\vec{B}$ zusammenhängen.

a) Stellen Sie die klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie, dass die Gleichungen äquivalent sind zur Lorentz-Kraft, die ein geladenes Teilchen im $\vec{E}$- und $\vec{B}$-Feld spürt, d.h. (2 P.)

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + e\dot{\vec{r}}\times\vec{B}$$

b) Jemand führt eine Eichtransformation gemäß

$$\vec{A}'(\vec{r},t) = \vec{A}(\vec{r},t) + \vec{\nabla}\chi(\vec{r},t)$$
$$\Phi'(\vec{r},t) = \Phi(\vec{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\chi(\vec{r},t)$$

durch, wobei $\chi(\vec{r},t)$ ein beliebiges stetig differenzierbares skalares Feld sei. Wie ändert sich die Hamiltonfunktion bei dieser Eichtransformation? Welche Auswirkungen hat das auf die Bewegung des Teilchens? (1 P.)

Aufgabe 28: Ebener Rotator im Vektorpotential (4 Punkte)

Unter einem ebenen Rotator verstehen wir ein Teilchen mit Masse m und Ladung e, das sich auf einem Kreis mit Radius a bewegt. Der Hamiltonoperator ist in Zylinderkoordinaten (r,φ,z) gegeben durch

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_\varphi^2}{2m} \qquad \text{mit} \qquad \hat{p}_\varphi = \frac{\hbar}{i}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

a) Bestimmen Sie die Energieeigenfunktionen und -eigenwerte des ebenen Rotators. Beachten Sie dabei, dass die Wellenfunktion eine periodische Funktion der Variablen φ sein muss, d.h. $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$. (1 P.)

b) Der ebene Rotator werde nun folgendem Vektorpotential ausgesetzt:

$$\vec{A} = \vec{e}_\varphi \begin{cases} \frac{B}{2}r & \text{für } r \leq r_0 \\ \frac{Br_0^2}{2r} & \text{für } r \geq r_0 \end{cases}$$

wobei $\vec{e}_\varphi$ der Einheitsvektor in φ-Richtung ist und $r_0 < a$ sein soll. Berechnen Sie die zugehörige Magnetfeldverteilung $\vec{B}(\vec{r})$. Wie groß ist die Magnetfeldstärke entlang der Bahn des Teilchens? (1 P.)

c) Berechnen Sie die Energieeigenfunktionen und -eigenwerte des ebenen Rotators in Anwesenheit dieses Vektorpotentials. (2 P.)

Besprechung am <u>26.06.2015</u>.