Universität Bielefeld, Prof. Dr. Thomas Dahm Bielefeld, den 11.06.2015

Übungen zur Theoretischen Physik II

Sommersemester 2015 Blatt 9

Aufgabe 23: Spin-Bahn-Wechselwirkung (4 Punkte)

Ein Elektron mit Spin $s = \frac{1}{2}$ und Bahndrehimpuls $l = 1$ werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = a\hat{\vec{S}} \cdot \hat{\vec{L}} + b\left(\hat{L}_z + \hat{S}_z\right)$$

beschrieben, wobei a und b reelle Konstanten seien. Wieviele Energieeigenwerte hat dieses System und wie lauten sie ?

Hinweis: Bestimmen Sie analog zur Vorlesung zunächst einen Satz von Operatoren, die untereinander und mit $\hat{H}$ kommutieren. Drücken Sie anschliessend $\hat{H}$ durch diese Operatoren aus.

Aufgabe 24: Anharmonischer Oszillator: Störungstheorie (4 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen anharmonischen Oszillator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 + \lambda\hat{x}^4 \tag{1}$$

wobei $\lambda > 0$ eine reelle Konstante sei. Wenn λ hinreichend klein ist, sollten die Energieniveaus nur geringfügig von denen des harmonischen Oszillators mit $\lambda = 0$ abweichen. Berechnen Sie mit Hilfe der Störungstheorie für kleine Werte von λ die Energieeigenwerte von $\hat{H}$

a) in linearer Näherung in λ (2 P.)

b) in quadratischer Näherung in λ. (2 P.)

Hinweis: Zur Vereinfachung der Rechnung können Sie den Ortsoperator $\hat{x}$ durch die Kletteroperatoren des harmonischen Oszillators ausdrücken.

Aufgabe 25: Anharmonischer Oszillator: Variationsmethode (9 Punkte)

Berechnen Sie nun näherungsweise die Grundzustandsenergie des anharmonischen Oszillators in Gleichung (1) mit Hilfe der in der Vorlesung besprochenen Variationsmethode. Wählen Sie als sinnvollen Variationsansatz die Gaußsche Wellenfunktion

$$\psi(x) = Ae^{-ax^2}$$

wobei $a > 0$ ein reeller Variationsparameter sei.

a) Zeigen Sie, dass sich aus der Minimierung der Grundzustandsenergie die folgende Gleichung dritten Grades in a ergibt: (2 P.)

$$\frac{\hbar^2}{2m}a^3 - \frac{1}{8}m\omega^2 a - \frac{3}{8}\lambda = 0$$

Lösen Sie diese Gleichung

b) näherungsweise für kleine λ in linearer Näherung in λ (2 P.)

c) näherungsweise für große λ (1 P.)

d) exakt (2 P.)

und berechnen Sie jeweils die zugehörige Grundzustandsenergie.

e) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem aus Aufgabe 24, indem Sie beide Grundzustandsenergien als Funktion des Parameters λ plotten. Wie vergleichen sich die beiden Ergebnisse in linearer Näherung in λ ? Welches Ergebnis liegt für große λ näher an der wirklichen Grundzustandsenergie ? (2 P.)

Hinweis: es ist hilfreich, mit dimensionslosen Größen zu arbeiten.

Besprechung am 19.06.2015.