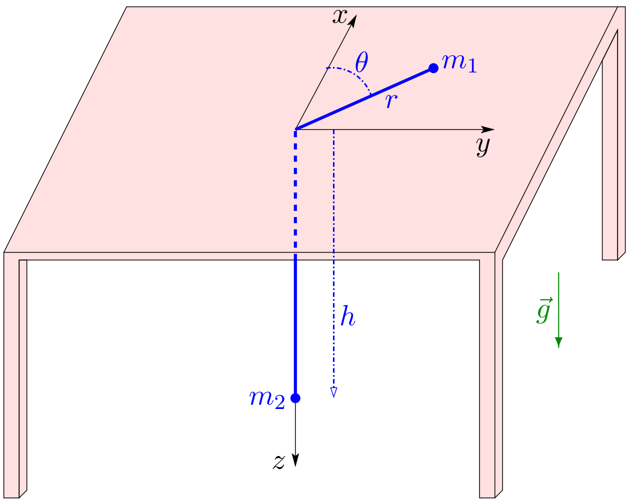
Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Ihren Namen, Vornamen und Matrikelnummer und nummerieren Sie die Blätter

1. Zwei-Massen-System (15 P.)

Zwei (Punkt)Massen m_1 und m_2 befinden sich an den Endpunkten eines masselosen Fadens mit fester Länge $\ell = r + h$, der durch ein Loch in einem horizontalen Tisch durchläuft. Die Masse m_1 bleibt in der (x, y)-Ebene des Tischs, auf welchem sie sich reibungslos bewegen kann; die Masse m_2 bewegt sich nur entlang der vertikalen, nach *unten* gerichteten z-Achse. Das ganze System liegt im Schwerefeld $\vec{g}$.



i. Wie viele Freiheitsgrade gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort.

ii. Bestimmen Sie eine Lagrange-Funktion für das System.

iii. Wie lauten allgemein die Euler–Lagrange-Gleichungen? Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für den Winkel θ und für die Höhe h auf.

2. Pendel mit Hula-Hoop-Reifen (30 P.)

Ein Hula-Hoop-Reifen wird als eine unendlich dünne, homogene Massenverteilung modelliert, die einen Kreis mit Radius R macht.

i. „Vorbereitung“

Sei m die Masse des Hula-Hoop-Reifens.

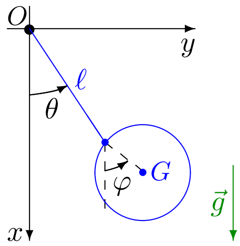
a) Geben Sie dessen Massendichteverteilung $\rho(\vec{r})$ an.

b) Wie ist das Trägheitsmoment eines starren Körpers um eine Achse definiert? Zeigen Sie, dass das Trägheitsmoment des Reifens um die Achse des Kreises $I = mR^2$ beträgt.

c) (Die Ergebnisse dieser Frage sind für **ii.** nicht nötig.) Wie lautet der Steiner'sche Satz? Folgern Sie daraus das Trägheitsmoment I' des Reifens um eine Drehachse, die parallel zur Kreisachse durch einen Punkt des Kreises durchläuft.

ii. Doppelpendel

Ein ebenes Pendel besteht aus einem Hula-Hoop-Reifen mit Masse m und Radius R am Ende eines masselosen Stabs mit konstanter Länge ℓ, wobei sich der Reifen reibungslos um seinen Aufhängepunkt drehen kann; das ganze System liegt im Schwerefeld. In der Bewegung bleiben der Stab und der Reifen in der (x, y)-Ebene.



a) Wie lautet die kinetische Energie für die Translationsbewegung des Schwerpunkts G des Reifens relativ zum Nullpunkt O?

b) Geben Sie die kinetische Energie für die Drehbewegung des Reifens um dessen Schwerpunkt.

c) Bestimmen Sie die „übliche“ Lagrange-Funktion des Systems. Zeigen Sie, dass sie für kleine Ablenkungen $|\theta|, |\varphi| \ll 1$

$$\mathcal{L} \simeq \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + m\ell R\dot{\theta}\dot{\varphi} + mg\ell\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) + mgR\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) \tag{1}$$

lautet, wobei nur Terme bis zur zweiten Ordnung in θ, $\dot{\theta}$, φ, $\dot{\varphi}$ behalten wurden.

d) Stellen Sie ausgehend von der Lagrange-Funktion (1) die Bewegungsgleichungen des Pendels für kleine Ablenkungswinkel auf.

e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen der Normalmoden von kleinen Schwingungen. Prüfen Sie nach, dass diese für $R = \ell/2$ durch

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}(2 \pm \sqrt{2})$$

gegeben sind.

3. Bewegung auf einer Rotationsfläche **(35 P.)**

Betrachten Sie die Bewegung einer Punktmasse m, die sich reibungslos auf einer Rotationsfläche $r = f(z) > 0$ im Schwerefeld $\vec{g}$ bewegen kann, wobei r den Abstand von der vertikalen, nach oben gerichteten z-Achse bezeichnet, mit f einer (genug kontinuierlich differenzierbaren) Funktion.

Wegen der Geometrie des Problems ist es sinnvoll, die Bewegung der Punktmasse in Zylinderkoordinaten (r, θ, z) zu beschreiben.

i. Erklären Sie, warum es zwei Freiheitsgrade gibt.

ii. Bewegungsgleichungen

Als verallgemeinerte Koordinaten werden die Höhe z und der Winkel θ gewählt.

a) Bestimmen Sie eine Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ für das System.

b) Wie lautet die Euler–Lagrange-Gleichung für den Winkel θ? Was ist die physikalische Bedeutung dieser Gleichung?

c) Stellen Sie die Euler–Lagrange-Gleichung für z auf. Zeigen Sie, dass sie sich in der Form

$$\ddot{z}\big[1 + f'(z)^2\big] + \dot{z}^2 f'(z)f''(z) = -g + C^2\frac{f'(z)}{f(z)^3} \tag{2}$$

schreiben lässt, mit f', f'' den sukzessiven Ableitungen von f und $C \equiv f(z)^2\,\dot{\theta}$.

iii. Stabilität von Bahnkurven

a) Überprüfen Sie, dass eine mögliche Bahn ist

$$\dot{\theta}(t) = \Omega_0 \quad , \quad z(t) = z_0 \tag{3a}$$

mit konstanten Ω_0 und z_0, wobei z_0 die Gleichung

$$f'(z_0) = \frac{g}{C^2}f(z_0)^3 = \frac{g}{\Omega_0^2 f(z_0)} \tag{3b}$$

erfüllt.

b) Die Bahn (3) wird (leicht) gestört, indem nun

$$z(t) = z_0 + \epsilon \sin \omega t \quad \text{mit } 0 < \epsilon \ll 1 \tag{4}$$

gilt.
Führen Sie Taylor-Entwicklungen von $f(z)$, $f'(z)$ und $1/f(z)^3$ um $z = z_0$ bis zur Ordnung ϵ durch. Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung (2) zu dieser Ordnung zu

$$-\epsilon\omega^2 \left[1 + f'(z_0)^2\right] \sin \omega t = -g + \frac{C^2}{f(z_0)^3} \left[f'(z_0) - \frac{3f'(z_0)^2}{f(z_0)} \epsilon \sin \omega t + \epsilon f''(z_0) \sin \omega t \right] \tag{5}$$

führt. Folgern Sie daraus eine Beziehung zwischen ω^2 und Ω_0^2 in Abhängigkeit von $f(z_0)$, $f'(z_0)$ und $f''(z_0)$.

c) Zeigen Sie, dass $\omega^2 > 0$ für $f(z_0)f''(z_0) < 3f'(z_0)^2$. Was bedeutet dies für die Bahn (4)? Das physikalische Verhalten widerspricht teilweise der Intuition: erklären Sie, wieso die Punktmasse sich wechselweise „bergab" und „bergauf" bewegen kann.

d) Was passiert physikalisch falls $f(z_0)f''(z_0) > 3f'(z_0)^2$?

Hinweis: Die Euler'sche Formel für die Sinusfunktion kann hilfreich sein, man kann aber auch ohne argumentieren und sich auf Wissen aus der Vorlesung berufen.

4. Feld einer elektrisch geladenen Kugelschale (15 P.)

Berechnen Sie für $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ das elektrostatische Potential $\Phi(\vec{r})$ und das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ einer homogen geladenen, unendlich dünnen, statischen, leeren Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q, deren Zentrum im Nullpunkt des Koordinatensystems sitzt.

Hinweis: Das elektrostatische Potential ist überall stetig

5. Plattensender (25 P.)

Ein „Plattensender" erzeugt rechts und links der Ebene $x = 0$ das elektrische Feld

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = E_0[\Theta(x)\cos(kx - \omega t) + \Theta(-x)\cos(kx + \omega t)]\vec{e}_y. \tag{6}$$

Dabei ist $\Theta(x)$ die Stufenfunktion (Heaviside-Funktion) und $\omega = ck$.

i. Zeigen Sie, dass dieses Feld die Maxwell–Gauß-Gleichung im ladungsfreien Bereich $x \neq 0$ erfüllt.

ii. Geben Sie einen Ausdruck für das Magnetfeld $\vec{B}(t, \vec{r})$ für $x \neq 0$ an.

Hinweis: Maxwell–Faraday-Gleichung

iii. Berechnen Sie, welche Stromdichte $\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t, \vec{r})$ man braucht, um dieses Feld zu erzeugen

Hinweis: Maxwell–Ampère-Gleichung

6. Eichtransformationen (25 P.)

i. Wissen

Seien $\vec{E}$ und $\vec{B}$ elektromagnetische Felder. Wie lassen sie sich aus Potentialen Φ, $\vec{A}$ ableiten? Wie lautet eine allgemeine Eichtransformation $(\Phi, \vec{A}) \to (\Phi', \vec{A}')$?

ii. Seien $\rho_{\text{el.}}$ und $\vec{\jmath}_{\text{el.}}$ die Ladungs- und Stromverteilungen, die das elektromagnetische Feld $\vec{E}$, $\vec{B}$ erzeugen. In der Vorlesung wurden die sog. retardierten Potentiale

$$\Phi_{\text{ret.}}(t, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{el.}}(t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3\vec{r}\,', \qquad \vec{A}_{\text{ret.}}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\jmath}_{\text{el.}}(t - |\vec{r} - \vec{r}\,'|/c, \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3\vec{r}\,' \tag{7}$$

eingeführt.

a) Welche Eichbedingung erfüllen diese Potentiale? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $\Phi(t,\vec{r})$ ein anderes Skalarpotential für die gleichen Felder $\vec{E}$, $\vec{B}$. Zeigen Sie, dass die „Eichfunktion“ $\chi(t,\vec{r})$, die in der Eichtransformation (aus **i.**) von $\Phi_{\text{ret.}}$ nach Φ auftritt, durch

$$\chi(t,\vec{r}) = \int_{-\infty}^{t} \left[\Phi_{\text{ret.}}(t',\vec{r}) - \Phi(t',\vec{r})\right] \mathrm{d}t' \tag{8a}$$

gegeben ist. Folgern Sie daraus, dass das zugehörige Vektorpotential formell

$$\vec{A}(t,\vec{r}) = \vec{A}_{\text{ret.}}(-\infty,\vec{r}) - \int_{-\infty}^{t} \left[\vec{E}(t',\vec{r}) + \vec{\nabla}\Phi(t',\vec{r})\right] \mathrm{d}t' \tag{8b}$$

lautet. (Dafür brauchen Sie $\vec{E}$ *nicht* zu bestimmen.)

Es können 145 Punkte erreicht werden.
Noten (voraussichtlich):

- $0 \leq P < 50 \Rightarrow 5.0$
- $50 \leq P < 55 \Rightarrow 4.0$
- $55 \leq P < 60 \Rightarrow 3.7$
- $60 \leq P < 65 \Rightarrow 3.3$
- $65 \leq P < 70 \Rightarrow 3.0$
- $70 \leq P < 75 \Rightarrow 2.7$
- $75 \leq P < 80 \Rightarrow 2.3$
- $80 \leq P < 85 \Rightarrow 2.0$
- $85 \leq P < 90 \Rightarrow 1.7$
- $90 \leq P < 95 \Rightarrow 1.3$
- $P \geq 95 \Rightarrow 1.0$