## 1. Ebenes Pendel mit zeitabhängiger Länge **30 P.**

### i. Wissensfragen (6 P.)

**a)** Die Euler–Lagrange-Gleichungen lauten

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad \forall i \tag{1}$$

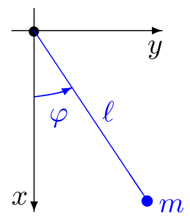
mit $\mathcal{L}$ der Lagrange-Funktion und $q_i$ bzw. $\dot{q}_i$ den verallgemeinerten Koordinaten bzw. Geschwindigkeiten.

**b)** Diese Gleichungen können aus dem *Hamilton-Prinzip* (Extremalprinzip) hergeleitet werden: für die physikalisch realisierte Bewegung ist die Wirkung

$$S \equiv \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}\big(t, \{q_i(t)\}, \{\dot{q}_i(t)\}\big)\,\mathrm{d}t$$

extremal.

### ii. Anwendung zum ebenen Pendel mit zeitabhängiger Länge $\ell(t)$ (24 P.)




**a)** Insgesamt könnte die Masse drei (Translations-)Freiheitsgrade haben. Da die Bewegung in einer Ebene bleibt, entsprechend der Zwangsbedingung $z = 0$, bleiben nur $s = 2$ Freiheitsgrade übrig. Als verallgemeinerte Variablen kann man den Winkel $\varphi$ und die Länge $\ell$ betrachten. Dann gelten

$$x(t) = \ell(t)\cos\varphi(t), \quad y(t) = \ell(t)\sin\varphi(t),$$

und somit $\dot{x}(t) = \dot{\ell}(t)\cos\varphi(t) - \ell(t)\dot{\varphi}(t)\sin\varphi(t)$, $\quad \dot{y}(t) = \dot{\ell}(t)\sin\varphi(t) + \ell(t)\dot{\varphi}(t)\cos\varphi(t)$.

**b)** Allgemein ist die Lagrange-Funktion durch die Differenz $\mathcal{L} = T - V$ aus kinetischer und Potentialenergie gegeben. Hier gelten

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\big[\dot{\ell}^2 + (\ell\dot{\varphi})^2\big]$$

und $V = -mgx = -mg\ell\cos\varphi$, d.h.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\big[\dot{\ell}^2 + (\ell\dot{\varphi})^2\big] + mg\ell\cos\varphi.$$

**c)** Die Euler–Lagrange-Gleichung (1) für $q_i = \ell$ lautet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell} = m\ell\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}} = m\dot{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad m\ddot{\ell} = m\ell\dot{\varphi}^2 + mg\cos\varphi.$$

Für $q_i = \varphi$ gelten $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -mg\ell\sin\varphi$ und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m\ell^2\dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = 2m\ell\dot{\ell}\dot{\varphi} + m\ell^2\ddot{\varphi},$$

und daher $-mg\ell\sin\varphi = 2m\ell\dot{\ell}\dot{\varphi} + m\ell^2\ddot{\varphi}$, d.h. nach Vereinfachungen ($\ell \neq 0$)

$$\ell\ddot{\varphi} + 2\dot{\ell}\dot{\varphi} + g\sin\varphi = 0. \tag{2}$$

(Im Fall einer festen Länge $\ell$, d.h. $\dot{\ell} = 0$, ergibt sich die Bewegungsgleichung des einfachen ebenen Pendels.)

**d)** Für $\ell(t) = \ell_0 + \alpha t$ gilt $\dot{\ell} = \alpha$. Andererseits kann man auch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell} = \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ell}$$

schreiben, so dass Gl. (2) zu

$$\ell\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\ell^2} + 2\alpha^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\ell} + g\sin\varphi = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \ell\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\ell^2} + 2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\ell} + \frac{g}{\alpha^2}\sin\varphi = 0.$$

Für kleine Ablenkungen $\varphi$ gilt $\sin\varphi \sim \varphi$, d.h.

$$\ell\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}\ell^2} + 2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\ell} + \frac{g}{\alpha^2}\varphi = 0.$$

## 2. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator 30 P.

Die Bewegungsgleichung eines isotropen dreidimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{x}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -k\vec{x}(t), \tag{3}$$

mit $k$ einer konstanten reellen Zahl.

**i.** **(6 P.)** Das Produkt aus der $i$-ten Komponente der Bewegungsgleichung (3) mit $p_j = m\dot{x}_j$ lautet

$$\dot{p}_i p_j = m\ddot{x}_i p_j = -kx_i p_j = -kx_i m\dot{x}_j \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{m}\dot{p}_i p_j + kx_i\dot{x}_j = 0.$$

Ähnlich gilt $\frac{1}{m}\dot{p}_j p_i + kx_j\dot{x}_i = 0$, d.h. nach Summieren

$$\frac{1}{m}(\dot{p}_i p_j + \dot{p}_j p_i) + k(x_i\dot{x}_j + x_j\dot{x}_i) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}(p_i p_j)}{\mathrm{d}t} + k\frac{\mathrm{d}(x_i x_j)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

oder äquivalent

$$\frac{\mathrm{d}A_{ij}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{mit} \quad A_{ij}(t) \equiv \frac{1}{2m}p_i(t)p_j(t) + \frac{1}{2}kx_i(t)x_j(t) \tag{4}$$

**ii.** Eigenschaften des JHF-Tensors: **(10 P.)**

**a)** Die Spur ist die Summe der diagonalen Elemente

$$\mathrm{Tr}\,\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_{ii} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}k\vec{x}^2;$$

man erkennt die Summe aus kinetischer und Potentialenergie, d.h. die Gesamtenergie $E$.

**b)** Unter Verwendung von $L_i = \epsilon_{ikl}x_k p_l$ kommt

$$L_i A_{ij} = \frac{1}{2m}\epsilon_{ikl}x_k p_l p_i p_j + \frac{k}{2}\epsilon_{ikl}x_k p_l x_i x_j.$$

Im ersten bzw. zweiten Term tritt das Produkt aus dem völlig antisymmetrischen Tensor $\epsilon_{ikl}$ mit dem symmetrischen Produkt $p_i p_l$ bzw. $x_i x_k$ auf: in der Summe über alle Werte von $i$ und $l$ bzw. $i$ und $k$ ergibt sich Null.

**c)** $x_i A_{ij} x_j = \frac{1}{2m}x_i p_i p_j x_j + \frac{k}{2}x_i x_i x_j x_j = \frac{1}{2m}(\vec{x}\cdot\vec{p})^2 + \frac{k}{2}\left(\vec{x}^2\right)^2$. Mit $(\vec{x}\cdot\vec{p})^2 = \vec{x}^2\vec{p}^2 - (\vec{x}\times\vec{p})^2$ kommt

$$x_i A_{ij} x_j = \frac{1}{2m}\left(\vec{x}^2\vec{p}^2 - \vec{L}^2\right) + \frac{k}{2}\left(\vec{x}^2\right)^2 = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k}{2}\vec{x}^2\right)\vec{x}^2 - \frac{\vec{L}^2}{2m} = \vec{x}^2 E - \frac{\vec{L}^2}{2m}.$$

**d)** Der Beweis ist ähnlich dem von **ii.c)**:

$$p_i A_{ij} p_j = \frac{1}{2m}p_i p_i p_j p_j + \frac{k}{2}p_i x_i x_j p_j = \frac{\vec{p}^2}{2m}\vec{p}^2 + \frac{k}{2}(\vec{x}\cdot\vec{p})^2 = \frac{\vec{p}^2}{2m}\vec{p}^2 + \frac{k}{2}\vec{x}^2\vec{p}^2 - \frac{k}{2}\vec{L}^2 = \vec{p}^2 E - \frac{1}{2}k\vec{L}^2.$$

**iii.** **(14 P.)** Die 3 Eigenwerte des JHF-Tensors sind

$$\lambda_1 = \frac{E - \sqrt{E^2 - \omega^2 \vec{L}^2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{E + \sqrt{E^2 - \omega^2 \vec{L}^2}}{2}, \qquad \text{und} \qquad \lambda_3 = 0,$$

wobei $\omega^2 = k/m$.

**a)** Sei $\vec{e}_k$ ein Eigenvektor zu $\mathbf{A}$ mit Eigenwert $\lambda_k$, d.h. (hier wird nicht über $k$ summiert)

$$\mathbf{A}\vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k \qquad \Leftrightarrow \qquad A_{ij} e_{k,j} = \lambda_k e_{k,i}$$

mit $e_{k,j}$ der $j$-ten Komponente von $\vec{e}_k$. Nach Multiplikation mit $L_i$ und Summe über $i = 1,2,3$ kommt

$$L_i A_{ij} e_{k,j} = \lambda_k L_i e_{k,i} = \lambda_k \vec{L} \cdot \vec{e}_k.$$

Laut **ii.b)** ist die linke Seite gleich Null: entweder $\lambda_k = 0$ (für $k = 3$) oder $\vec{L} \cdot \vec{e}_k = 0 \Leftrightarrow \vec{e}_k \perp \vec{L}$ falls $\lambda_k \neq 0$, d.h. für $k = 1, 2$.

**b)** In der Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ von Eigenvektoren lautet die Matrixdarstellung des JHF-Tensors

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $A_{33} = \lambda_3 = 0$: laut der Definition von $A_{ij}$ sollen $x_3 = 0$ und $p_3 = 0$ gelten. Somit findet keine Bewegung entlang der Richtung von $\vec{e}_3$, oder äquivalent $\vec{L}$, statt: der Oszillator bleibt in der Ebene $x_3 = 0$, senkrecht zum Drehimpuls — wie immer für ein Zentralkraftproblem.

In der Basis $\{\vec{e}_i\}_{i=1,2,3}$ gilt $x_i A_{ij} x_j = \lambda_1 (x_1)^2 + \lambda_2 (x_2)^2$. Unter Verwendung von $x_3 = 0$ (s. oben) und des Ergebnisses aus **ii.a)** kommt

$$x_i A_{ij} x_j = \lambda_1 (x_1)^2 + \lambda_2 (x_2)^2 = \vec{x}^2 E - \frac{\vec{L}^2}{2m} = \left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right] E - \frac{\vec{L}^2}{2m}.$$

Mit $E = \lambda_1 + \lambda_2$ und $\vec{L}^2/m = \omega^2 \vec{L}^2/k = 4\lambda_1\lambda_2/k$ ergibt sich

$$\lambda_1 (x_1)^2 + \lambda_2 (x_2)^2 = \left[(x_1)^2 + (x_2)^2\right](\lambda_1 + \lambda_2) - 2\frac{\lambda_1 \lambda_2}{k} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 (x_1)^2 + \lambda_1 (x_2)^2 = 2\frac{\lambda_1 \lambda_2}{k}. \tag{5}$$

Falls $\lambda_1 = 0$ — entsprechend $\vec{L} = \vec{0}$, $\lambda_2 = E$ — vereinfacht sich diese Gleichung zu $x_1 = 0$, d.h. zur Gleichung einer Gerade (genauer soll die Bahnkurve eine Strecke sein, da $x_1$ nach Angabe der Gesamtenergie $E$ endlich bleibt). Für $\lambda_1 \neq 0$ kann man Gl. (5) durch $2\lambda_1\lambda_2/k > 0$ teilen:

$$\frac{(x_1)^2}{2\lambda_1/k} + \frac{(x_2)^2}{2\lambda_2/k} = 1, \tag{6}$$

entsprechend der Gleichung in kartesischer Koordinaten einer Ellipse. Somit hat man die Bahnkurve gefunden, ohne jegliche Integration der Bewegungsgleichung (3) durchzuführen.

## 3. Ebene elektromagnetische Welle **40 P.**

### i. Elektrisches und magnetisches Feld (8 P.)

Die elektromagnetischen Potentiale

$$\Phi(t, \vec{r}) = \lambda c f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \qquad \vec{A}(t, \vec{r}) = \vec{\varepsilon} f(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{7}$$

führen zum elektrischen Feld

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = -\vec{\nabla}\Phi(t, \vec{r}) - \frac{\partial \vec{A}(t, \vec{r})}{\partial t} = -\lambda c \vec{k} f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \omega \vec{\varepsilon} f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = (\omega \vec{\varepsilon} - \lambda c \vec{k}) f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \tag{8a}$$

und zur magnetischen Induktion

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(t, \vec{r}) = \vec{k} \times \vec{\varepsilon} f'(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t). \tag{8b}$$

**ii. Eichtransformation (4 P.)**

Unter den gleichzeitigen Änderungen

$$\lambda \to \lambda' \equiv \lambda + \alpha\frac{\omega}{c}, \qquad \vec{\varepsilon} \to \vec{\varepsilon}\,' \equiv \vec{\varepsilon} + \alpha\vec{k} \qquad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \tag{9}$$

werden die Felder (8) zu

$$\vec{E}' = (\omega\vec{\varepsilon}\,' - \lambda' c\vec{k})f' = \big(\omega\vec{\varepsilon} + \alpha\omega\vec{k} - \lambda c\vec{k} - \alpha\omega\vec{k}\big)f' = (\omega\vec{\varepsilon} - \lambda c\vec{k})f' = \vec{E}$$

und

$$\vec{B}' = \vec{k} \times \vec{\varepsilon}\,' f' = \vec{k} \times \big(\vec{\varepsilon} + \alpha\vec{k}\big)f' = \vec{k} \times \vec{\varepsilon} f' = \vec{B}.$$

D.h., die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bleiben invariant unter der Transformation (9) der Potentiale, die somit eine Eichtransformation ist.

**iii. Inhomogene Maxwell-Gleichungen (12 P.)**

Allgemein lauten die inhomogenen Maxwell-Gleichungen im Vakuum

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad , \qquad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}. \tag{10}$$

Für die Felder (8) gelten ($f''$ bezeichnet natürlich die zweite Ableitung)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = (\omega\vec{\varepsilon} - \lambda c\vec{k}) \cdot \vec{k} f'' = (\omega\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} - \lambda c\vec{k}^2)f'' \tag{11}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{k} \times \big(\vec{k} \times \vec{\varepsilon}\big)f'' - \frac{-\omega}{c^2}(\omega\vec{\varepsilon} - \lambda c\vec{k})f'' = \left[(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k})\vec{k} - \vec{k}^2\vec{\varepsilon} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{\varepsilon} - \frac{\lambda\omega}{c}\vec{k}\right]f'' \\ &= \left[\left(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} - \frac{\lambda\omega}{c}\right)\vec{k} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\vec{\varepsilon}\right]f''.\end{aligned} \tag{12}$$

Die Maxwell–Gauß-Gleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ ist dann äquivalent — falls $f''$ nicht identisch verschwindet — zur Beziehung $\omega\vec{\varepsilon} \cdot \vec{k} - \lambda c\vec{k}^2 = 0$, d.h.

$$\lambda\vec{k}^2 = \frac{\omega}{c}\vec{k} \cdot \vec{\varepsilon}. \tag{13}$$

Unter Verwendung dieser Gleichung wird Gl. (12) zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \left[\left(\frac{\lambda c}{\omega}\vec{k}^2 - \frac{\lambda\omega}{c}\right)\vec{k} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\vec{\varepsilon}\right]f'' = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\left(-\frac{\lambda c}{\omega}\vec{k} + \vec{\varepsilon}\right)f''.$$

Die Maxwell–Ampère-Gleichung ist dann erfüllt, wenn

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2\right)\left(\vec{\varepsilon} - \frac{\lambda c}{\omega}\vec{k}\right) = \vec{0}. \tag{14}$$

**iv. Fall $\omega^2 \neq c^2\vec{k}^2$ (4 P.)**

Dann muss laut Gl. (14) $\vec{\varepsilon} = \lambda c\vec{k}/\omega$ gelten. Die Eichtransformation (9) mit $\alpha = -\lambda c/\omega$ führt zu

$$\vec{\varepsilon}\,' = \frac{\lambda c}{\omega}\vec{k} - \frac{\lambda c}{\omega}\vec{k} = \vec{0},$$

d.h. $\vec{A}' = \vec{0}$, und

$$\lambda' = \lambda - \frac{\lambda c}{\omega}\frac{\omega}{c} = 0,$$

d.h. $\Phi' = 0$. Beide Potentiale, und somit die $\vec{E}$ und $\vec{B}$ Felder, verschwinden.

**v. Fall $\omega^2 = c^2\vec{k}^2$ (12 P.)**

**a)** Die Lorenz-Eichbedingung lautet

$$0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\lambda\omega}{c}f' + \vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}f' = \left(\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} - \frac{\lambda\omega}{c}\right)f' = \left(\frac{\omega}{c}\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} - \frac{\lambda\omega^2}{c^2}\right)\frac{c}{\omega}f' = \left(\frac{\omega}{c}\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} - \lambda\vec{k}^2\right)\frac{c}{\omega}f'.$$

Der Term in Klammern im rechten Glied verschwindet laut der Gl. (13), d.h. die Eichbedingung ist erfüllt.

**b)** Mit $\alpha = -\lambda c/\omega$ führt die Eichtransformation (9) zu

$$\lambda' = \lambda - \frac{\lambda c}{\omega}\frac{\omega}{c} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\varepsilon}' = \vec{\varepsilon} - \frac{\lambda c}{\omega}\vec{k}$$

Das heißt, man hat (wie in der Vorlesung!) $\Phi' = 0$. Dazu gilt $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}' = \vec{k}\cdot\vec{\varepsilon} - \lambda c\vec{k}^2/\omega = 0$, wobei die zweite Gleichung aus Beziehung (13) folgt.
Aus $\Phi' = 0$ folgt $\partial\Phi'/\partial t = 0$, so dass die Lorenz-Eichbedingung sich zur Coulomb-Eichbedingung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ vereinfacht.

Mit $\lambda = 0$ lauten die Felder (8)

$$\vec{E}(t,\vec{r}) = \omega\,\vec{\varepsilon}' f'(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad \text{und} \quad \vec{B}(t,\vec{r}) = \vec{k}\times\vec{\varepsilon}' f'(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}(t,\vec{r}),$$

wobei $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}' = 0$ (s. oben), d.h. $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$; dazu gelten auch $\vec{k}\cdot\vec{B} = \vec{E}\cdot\vec{B} = 0$ und $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$.

## 4. Magnetische Monopole 40 P.

### i. Wissensfragen (10 P.)

**a)** Die „üblichen“ Maxwell-Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_{\rm e} \tag{15a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \tag{15b}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \tag{15c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}_{\rm e}. \tag{15d}$$

**b)** Die Lorentz-Kraft auf eine elektrische Punktladung $q_{\rm e}$ mit Geschwindigkeit $\vec{v}$ ist

$$\vec{F}_{\rm L} = q_{\rm e}\big(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\big). \tag{16}$$

### ii. Erweiterte Maxwell-Gleichungen (18 P.)

Eine natürliche Lösung(?), um magnetische Ladungen und Ströme zu berücksichtigen, ist eine Änderung der Gl. (15b) und (15c)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = a\rho_{\rm m} \tag{15b'}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = b\vec{\jmath}_{\rm m} \tag{15c'}$$

mit $a$, $b$ festzustellenden Zahlen. Dagegen sollte man Gl. (15a) nicht modifizieren (Eigenschaft **A.**), und daher auch Gl. (15d) ungeändert lassen.
Leitet man die Gl. (15b') nach der Zeit ab und zieht man die Divergenzbildung der Gl. (15c') davon ab, so kommt [mit $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = 0$]

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\big) - \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 = a\frac{\partial\rho_{\rm m}}{\partial t} - b\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_{\rm m}.$$

Da die Erhaltung der magnetischen Ladung (Eigenschaft **D.**) lokal der „magnetischen Kontinuitätsgleichung“

$$\frac{\partial\rho_{\rm m}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath}_{\rm m} = 0 \tag{17}$$

entspricht, soll $b = -a$ sein.

Die Ladungsdichte $\rho_\mathrm{m}$ einer magnetischen Punktladung, die sich zur Zeit $t$ im Punkt $\vec{x}$ befindet, ist

$$\rho_\mathrm{m}(t,\vec{r}) = q_\mathrm{m}\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{x}). \tag{18}$$

Aus Symmetriegründen erzeugt eine solche magnetische Punktladung ein radiales Magnetfeld, dessen Betrag nur von der Abstand $|\vec{r}-\vec{x}|$ abhängt. Wählt man $\vec{x}=\vec{0}$, so lautet der Fluss des Magnetfeldes durch eine Kugelfläche $\partial\mathcal{V}$ mit Radius $R$ und Zentrum bei der Punktladung

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\mathcal{S} = 4\pi R^2 B(R).$$

Laut dem Integralsatz von Gauß lässt sich die linke Seite als

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{B}\cdot \mathrm{d}^2\mathcal{S} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}\,\mathrm{d}^3\vec{r} = \int_{\mathcal{V}} a q_\mathrm{m}\delta^{(3)}(\vec{r})\,\mathrm{d}^3\vec{r} = a q_\mathrm{m}$$

schreiben, wobei $\mathcal{V}$ die durch $\partial\mathcal{V}$ abgegrenzte Kugel bezeichnet. Somit gilt

$$B(R) = \frac{a q_\mathrm{m}}{4\pi R^2}.$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem angegebenen Ausdruck für das Magnetfeld einer magnetischen Punktladung (Eigenschaft **B.**), so findet man $a=\mu_0$: die erweiterten Maxwell-Gleichungen sollten dann

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho_\mathrm{e} \tag{19a}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \mu_0\rho_\mathrm{m} \tag{19b}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu_0\vec{\jmath}_\mathrm{m} \tag{19c}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{\jmath}_\mathrm{e}. \tag{19d}$$

lauten.

Im stationären Fall kann man die Zeitableitung des $\vec{B}$-Feldes in Gl. (19c) weglassen. Dann führt die Gleichung $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\mu_0\vec{\jmath}_\mathrm{m}$ (in Abwesenheit von statischer $\rho_\mathrm{m}$) zur Integralform

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\nabla}\times\vec{\jmath}_\mathrm{m}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

(Eigenschaft **C.**) oder äquivalent zum „elektrostatischen Biot–Savart-Gesetz“

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{\jmath}_\mathrm{m}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}\,'$$

**iii. Kraft auf eine bewegte magnetische Punktladung (6 P.)**

In analogie mit der Kraft (16) auf eine bewegte elektrische Punktladung sollte die Kraft auf eine magnetische Punktladung der Form

$$\vec{F} = q_m\big(\vec{B} + d\vec{v}\times\vec{E}\big)$$

sein, mit $d$ einem noch unbekannten Faktor. Falls die Punktladung sich nicht bewegt, gilt $\vec{F}=q_m\vec{B}$, wie in der Aufgabe angegeben wurde. Zur Bestimmung von $d$ sollen einerseits die Dimensionen berücksichtigt werden: das $\vec{E}$-Feld hat die Dimension des $\vec{B}$-Feldes multipliziert mit einer Geschwindigkeit — vgl. z.B. den Ausdruck der Lorentz-Kraft (16) —, so dass $d$ die Dimension $1/(\mathsf{L}\,\mathsf{T}^{-1})^2$ haben soll: da es nur eine „natürliche“ Geschwindigkeitsskala ($c$) gibt, soll $d\propto 1/c^2$ sein.

In der verallgemeinerten Gleichung (19c) kommt die magnetische Stromdichte mit einem Minus-Zeichen. In Analogie gilt $d=-1/c^2$, d.h.

$$\vec{F} = q_m\left(\vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right).$$

(In der Tat kann man prüfen — indem man eine schon mühsame Herleitung des Skripts verallgemeinert —, dass das Minus-Zeichen nötig ist, um die richtige Impulsbilanz zu finden, wenn man die in der Vorlesung angegebenen Impulsdichte und -stromdichte des elektromagnetischen Feldes betrachtet.)

**iv. Dualitätstransformation** **(6 P.)**

Definiert man neue Felder über

$$\vec{E}' = \vec{E}\cos\theta + c\vec{B}\sin\theta, \quad c\vec{B}' = -\vec{E}\sin\theta + c\vec{B}\cos\theta, \tag{20a}$$

$$\rho'_{\rm e} = \rho_{\rm e}\cos\theta + \frac{1}{c}\rho_{\rm m}\sin\theta, \quad \frac{1}{c}\rho'_{\rm m} = -\rho_{\rm e}\sin\theta + \frac{1}{c}\rho_{\rm m}\cos\theta, \tag{20b}$$

$$\vec{\jmath}'_{\rm e} = \vec{\jmath}_{\rm e}\cos\theta + \frac{1}{c}\vec{\jmath}_{\rm m}\sin\theta, \quad \frac{1}{c}\vec{\jmath}'_{\rm m} = -\vec{\jmath}_{\rm e}\sin\theta + \frac{1}{c}\vec{\jmath}_{\rm m}\cos\theta, \tag{20c}$$

so findet man dank der Linearität der erweiterten Maxwell-Gleichungen und der obigen Transformationen, und unter Verwendung der Beziehung $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1 \Leftrightarrow 1/\epsilon_0 = \mu_0 c^2$, dass die gestrichenen Felder die gleichen Gleichungen (19) wie die nicht-gestrichenen erfüllen.